Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Cláudia Alexandra da Costa Coutinho

O PROBLEMA DE STOKES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2006

Cláudia Alexandra da Costa Coutinho

O PROBLEMA DE STOKES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Doutora Paula Cerejeiras, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho aos meus pais e ao Marco.

o júri

presidente

Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Doutora Maria Joana Soares
Professora Associada da Escola de Ciências da Universidade do Minho

Doutora Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras
Professora Associada da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Para a realização deste trabalho foi indispensável a ajuda e apoio de várias pessoas, às quais agradeço sinceramente. Agradeço a orientação da Professora Doutora Paula Cerejeiras, pelos seus esclarecimentos e pela sua disponibilidade. Agradeço também aos meus pais e à minha irmã por estarem sempre presentes e ao Marco pela paciência e pelo carinho com que sempre me apoiou. Agradeço ainda a todos os meus amigos e colegas que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

palavras-chave equações diferenciais, dinâmica de fluídos, problema de Stokes, equações de Navier-Stokes

resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes. Este é um problema estreitamente ligado às equações de Navier-Stokes, que são um dos exemplos mais conhecidos de equações que modelam correntes de fluídos.

No capítulo 0, são introduzidas noções e resultados preliminares.

No capítulo 1, apresentamos a modelação das equações de fluxo. Derivamos apenas as equações de continuidade e as equações de momento e, destas últimas, deduzimos as equações de Navier-Stokes.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo das soluções fracas para o problema de Stokes, em espaços homogéneos de Sobolev.

No capítulo 3, analisamos a solubilidade do problema de Stokes, na forma hipercomplexa. Introduzimos o operador de Dirac, o operador de Teodorescu e o operador de fronteira, para domínios limitados, e analisamos a existência e unicidade de soluções deste problema nos espaços de Sobolev.

Finalmente, no capítulo 4, estudamos a existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes em domínios ilimitados, por adaptação adequada dos operadores para este tipo de domínios.

keywords

partial differencial equations, fluid dynamics, Stokes problem, Navier-Stokes equations

abstract

In this work we study the existence and uniqueness of solutions for the Stokes problem. This is a problem in strict connection with the Navier-Stokes equations, which are one of the most known examples of fluid dynamic equations.

On chapter 0, we introduce necessary preliminary notions and concepts.

On chapter 1, we present the modelation of flux equations. We derive only the continuity equations and the momentum equations and, from the later ones, we will deduce the Navier-Stokes equations.

The second chapter is devoted to the study of weak solutions to the Stokes problem, on homogeneous Sobolev spaces.

On chapter 3, we analyse the solubility of the Stokes problem in the hypercomplex form. We introduce the Dirac operator, the Teodorescu operator and the boundary operator on bounded domains and we analyse the existence and uniqueness of solutions on Sobolev spaces.

Finally, on chapter 4, we study the existence and uniqueness of solutions for the Stokes problem on unbounded domains, by means of an adequated adaptation of the operators to this kind of domains.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho apresentamos um breve estudo do Problema de Stokes. Este consiste numa aproximação linearizada das equações de Navier-Stokes, as quais constituem um importante exemplo de EDP's que modelam o escoamento de fluídos e cujo tratamento é particularmente dificultado pelo facto de serem não lineares.

O crescente interesse pelas equações de Navier-Stokes deve-se, em parte, à sua importância e aplicabilidade a vários ramos da ciência e indústria, como sejam os casos das ciências aeronáuticas, da meteorologia, da termo-hidráulica, da indústria do petróleo, entre outras. No entanto, vários problemas relacionados com estas equações, tais como existência e unicidade de soluções fortes, e unicidade e regularidade das soluções fracas, estão ainda por resolver. De entre os vários autores nesta área, podemos referir o trabalho de J. G. Heywood, O. A. Ladyzhenskaya e V. A. Solonnikov (ver [16], [17], [20]).

O estudo destas equações está estreitamente ligado à resolubilidade do problema de Stokes, o qual surge como ponto de partida para o presente trabalho. Refira-se que, até ao início da década de 90, apenas existia uma teoria completa para o problema de Stokes em espaços $W_q^k(\Omega)$, onde Ω denota um domínio limitado.

No capítulo preliminar, apresentaremos os conceitos básicos e as definições importantes para o estudo dos restantes capítulos. Nomeadamente, iniciaremos por apresentar os conceitos subjacentes a modelação de problemas físicos, dando especial relevância aos conceitos de derivada substancial e de divergência da velocidade, necessários para a modelação das equações de fluxo a obter no primeiro capítulo.

O primeiro capítulo é assim dedicado à modelação das equações que governam a passagem de um dado fluído através de um determinado corpo. Serão apenas apresentadas as equações de continuidade e as equações de momento, sendo estas últimas as que estão na origem das equações de Navier-Stokes. As primeiras resultam da aplicação do princípio físico da conservação da massa e têm em conta a incompressibilidade do fluído. Já as equações de momento surgem como as equações que governam o escoamento de um fluído regido pelo princípio físico da conservação dos momentos (dito, segunda lei de Newton).

No segundo capítulo apresentaremos a forma variacional para o problema de Stokes e estudaremos a existência e unicidade de soluções fracas para este problema em espaços homogéneos de Sobolev $D_q^1(\Omega)$, para o caso de correntes contínuas em domínios limitados. Concluiremos este capítulo com o estudo do problema não homogéneo em $\mathbb{R}^n$, por meio da solução fundamental para o problema de Stokes.

No terceiro capítulo estudaremos o problema de Stokes na sua forma hipercomplexa, ainda referente ao caso de domínios limitados. Serão introduzidos os operadores de Dirac e de Teodorescu T, e o operador de fronteira, F_Γ. Apresentaremos algumas propriedades destes operadores, que nos permitirão analisar a solubilidade do problema de Stokes nos espaços de Sobolev $W_q^k(\Omega)$.

Terminaremos este trabalho com o caso do problema de Stokes em domínios ilimitados. Serão definidos os operadores de Dirac, de Teodorescu, $\widetilde{T}$, e de fronteira, $\widetilde{F}_\Gamma$, para este tipo de domínios, e, recorrendo às suas propriedades, estudaremos a existência e unicidade de soluções para o problema de Stokes nos espaços de Sobolev $W_q^k(\Omega)$.

Capítulo 0

Preliminares

Nesta secção apresentamos alguns conceitos e noções básicos para compreensão dos resultados apresentados.

0.1 Formulação fraca de um problema

Um conceito importante no decorrer desta dissertação é o da formulação fraca de um problema. Para definição deste conceito considere-se um operador L (diferencial ou integral) e o respectivo problema de determinar u tal que a equação

$$Lu = f \tag{1}$$

é satisfeita num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

O problema de determinar u, sendo conhecida a função f, é considerado como a *forma forte* do problema. Todavia, na Natureza raramente as soluções procuradas satisfazem os requisitos de continuidade desejados; por exemplo, para o caso da equa ção de Laplace, a exigência de $u \in C^2$ no domínio em causa, se bem que necessária para a existência de solução de

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

revela-se demasiado forte, no sentido em que elimina soluções do tipo $u(x) = \frac{1}{(2-n)|\Omega|_n}|x|^{2-n}$, isto é, que possuem singularidade na origem.

Para ultrapassar esta dificuldade, é usual recorrer-se à formulação distribucional para o problema, ou seja, considera-se, em vez da forma (1), a equação funcional

$$< Lu - f, \varphi >= 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2}$$

Diremos então que o problema está na sua *forma fraca*.

0.2 Solução fundamental de um operador

Dado um operador $L = \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta D^\beta$, num domínio Ω, dizemos que uma função $E(x)$ é *solução fundamental* deste operador se e só se

$$L\left(E(x)\right) = \delta(x) \text{ em } \Omega$$

no sentido distribucional.

Por exemplo, para o operador de Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, a solução fundamental é usualmente designada por $\mathcal{E}$ e é dada por

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{4\pi}.$$

0.3 Espaços de funções

Começamos por enunciar algumas classes de funções importantes. Para tal consideramos $\Omega \neq \emptyset$ um domínio aberto e $\Gamma = \partial\Omega$ uma superfície suficientemente regular. No que se segue Ω denotará um dos conjuntos Ω, $\partial\Omega$ ou qualquer subconjunto de $\overline{\Omega}$ e passaremos a classificar o espaço das funções reais ou complexas com valores em Ω:

1. Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice, com cada $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$, inteiro não negativo, definimos a derivada
$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

2. $C^k(\Omega)$ $\quad (k = 1, 2...)$ é o espaço das funções u definidas em Ω, k vezes continuamente diferenciáveis, isto é, todas as derivadas $D^\alpha u$ de ordem $|\alpha| \leq k$ são contínuas em Ω.

   Definimos o espaço $C^k(\overline{\Omega})$ como o espaço das funções u cujas derivadas $D^\alpha u$ são limitadas e contínuas em Ω.

   O espaço $C^k(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com respeito à norma

$$\| u \|_{C^k} := max_{0\leq|\alpha|\leq k} sup_\Omega |D^\alpha u|$$

3. Uma função φ diz-se *Hölder-contínua* com expoente α se, dados $x, y \in \Omega$, se tem

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq c < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Se $\alpha = 1$ diz-se que a função é *Lipschitz-contínua.*

4. $L_p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty;\ k = 1, 2...)$ é o espaço das funções cuja potência de ordem p é integrável em Ω no sentido de *Lebesgue.*

   Neste espaço definimos a norma

$$\| u \|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \in [1, \infty[$$

$$\| u \|_\infty = sup \ ess_\Omega |u|.$$

   Munidos desta norma, os espaços L_p são espaços de Banach. No espaço L_2 definimos ainda o produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega uv \ dx, \ u, v \in L_2$$

   sendo o espaço L_2 um espaço de Hilbert.

   É um resultado conhecido que $C_0^\infty(\Omega)$ é subespaço linear denso de $L_p, \ 1 \leq p < \infty$.

   Nos espaços L_p é frequentemente utilizada a desigualdade de Hölder:

$$\int_\Omega |uv| \ dx \leq \| u \|_p \| v \|_{p'}, \text{ para } u \in L_p(\Omega) \text{ e } v \in L_{p'}(\Omega) \tag{3}$$

   No caso $q = 2$ a desigualdade anterior é usualmente designada por *desigualdade de Schwarz.*

5. $W_p^k(\Omega)$ é o espaço das funções k vezes diferenciáveis no sentido de *Sobolev* e cuja derivada de ordem k pertence a $L_p(\Omega)$. No caso de $k = 0$, $W_p^k(\Omega)$ coincide como espaço $L_p(\Omega)$.

   Para α um multi-índice, define-se o espaço $W_p^k(\Omega)$ da seguinte forma:

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L_p, \ 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

   Neste espaço define-se a norma

$$\| u \|_{p, \ k} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para } 1 \leq \text{p} < \infty$$

$$\| u \|_{k,\infty} = max_{0\leq|\alpha|\leq k} \| D^\alpha u \|_\infty$$

O espaço W_p^k, munido da norma anterior é um espaço de Banach.

Definimos o espaço $W_{0,\ p}^k(\Omega)$ como o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma anterior.

Observe-se que $W_{0,p} = W_{0,p}^0 = L_p$.

No caso de $p = 2$, o espaço W_2^k, e consequentemente o espaço $W_{0,2}^k$ são espaços de Hilbert, com produto interno

$$(u,v) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Em [10] podemos encontrar a prova do resultado seguinte:

Teorema 0.3.1 *Para qualquer domínio Ω, qualquer função de $W_p^k(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, pode ser aproximada, na norma anterior, por funções de $C^k(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$. Além disso, se Ω tem a propriedade do segmento, então as funções podem ser aproximadas, na mesma norma, por elementos de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$.*

Definição 0.3.2 Domínio de classe C^k

Seja Ω um domínio com fronteira limitada (isto é, Ω é um domínio limitado ou é exterior a um conjunto compacto ou mais simplesmente, Ω é um domínio exterior). Assuma-se que para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B_r(x_0)$ e uma função real ξ definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ tal que, num sistema de coordenadas $x_1, ldots, x_n$ com origem em x_0:

(i) o conjunto $\partial\Omega \cap B$ pode ser representado por uma equação do tipo $x_n = \xi(x_1, \ldots, x_{n-1})$;

(ii) cada $x \in \Omega \cap B$ satisfaz $x_n < \xi(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Então

- *Ω diz-se de classe C^k ou (C^k-suave) se $\xi \in C^k(\overline{D})$.*
- *Ω diz-se de classe $C^{k,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$ se $\xi \in C^{k,\lambda}(\overline{D})$*
- *em particular, Ω diz-se* **localmente lipschitziano** *se $\xi \in C^{0,1}(\overline{D})$.*

Em relação à fronteira $\partial\Omega$:

- *$\sigma \subset \partial\Omega$ é de classe C^k se $\sigma = \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ para algum $r > 0$ e $x_0 \in \partial\Omega$ e σ admite a representação descrita em (i) e (ii), com ξ de classe C^k;*

- *$\sigma \subset \partial\Omega$ é de classe $C^{k,\lambda}$ se $\sigma = \partial\Omega \cap B_r(x_0)$ para algum $r > 0$ e $x_0 \in \partial\Omega$ e σ admite a representação descrita em (i) e (ii), com ξ de classe $C^{k,\lambda}$.*

Definição 0.3.3 Propriedade do cone

Um domínio Ω satisfaz a propriedade do cone se existir um cone C tal que todo o ponto $x \in \partial\Omega$ é vértice de um cone finito $C_x = x + C$, contido em Ω.

Note-se que: *se Ω for localmente lipschitziano então Ω satisfaz a condição do cone.*

Definição 0.3.4 Condição do segmento

Dizemos que um domínio Ω satisfaz a condição do segmento se todo o ponto $x \in \partial\Omega$ tem uma vizinhança U_x e um vector $y_x \neq 0$ tal que: para todo z, se $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$ então $z + ty_x \in \Omega,\ 0 < t < 1$.

Definição 0.3.5 Domínio estrelado

Um domínio Ω diz-se um domínio estrelado se $\exists \overline{x} \in \Omega$ e uma função contínua e positiva h na esfera unitária tal que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \overline{x}| < h\left(\frac{x - \overline{x}}{|x - \overline{x}|}\right)\}$$

0.4 Conceitos básicos de modelação

0.4.1 Princípios físicos e modelos

A modelação de uma equação diferencial que descreva um fenómeno físico assenta num de três princípios físicos básicos, aplicados sob certas restrições, a um dado volume de controlo.

São estes princípios os seguintes:

1. princípio da conservação da massa, segundo o qual a massa de um sistema isolado é constante (a massa não pode ser criada, nem destruída). Assim, a variação total da massa do elemento volúmico de controlo será dada pela diferença entre o fluxo de massa para o interior e para o exterior da superfície do elemento volúmico em cada instante t, ou seja,

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_S \rho\vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0; \tag{4}$$

onde ρ designa a densidade da massa, $\vec{v}$, a velocidade do fluído, $\vec{n}$ é o vector normal unitário exterior e dV e dA são respectivamente os diferenciais de volume e de área de superfície.

2. segunda Lei de Newton $\left(\vec{F} = m\vec{a}\right)$, a qual assenta no princípio físico de que a taxa de variação dos momentos de um dado conjunto de partículas é dada pela força total exercida nesse conjunto, isto é,
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \tag{5}$$
onde m a massa total, $\vec{v}$ a velocidade e $\vec{F}$ a força resultante no conjunto das partículas.

   Sendo a massa constante, tem-se então que
$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \tag{6}$$

3. princípio da conservação da energia, segundo o qual a energia total de um sistema isolado é constante. Este princípio é traduzido pela equação
$$\int_V \frac{\partial pe}{\partial t}dV \ + \ \int_S \rho(e+pv)\vec{v}\cdot\overrightarrow{n}\,dA = \frac{dQ}{dt} - \frac{d\ w_s}{dt} \tag{7}$$
onde o nível de energia, e, é dado em função da energia cinética $\frac{\vec{v}^2}{2}$, da energia potencial gz e da energia interna por unidade de massa, e_i, e tem-se $e = \frac{\vec{v}^2}{2} + gz\ e_i$.

   A variável Q representa o calor adicionado, w_s é o trabalho realizado e p a pressão. A diferença entre a taxa de variação, no tempo, do calor adicionado ao elemento volúmico de controlo e a taxa a que o trabalho é realizado pelo elemento volúmico de controlo, é igual à soma da taxa de variação da energia e do fluxo de energia e de trabalho sobre a superfície do elemento volúmico de controlo.

A escolha do princípio físico condiciona o tipo de equação que se obtém. Assim, do princípio físico da conservação da massa resulta uma continuidade da massa do fluído ao longo do tempo (ver secção (1.1.)), pelo que as equações emergentes são designadas *equações da continuidade*. Por escolha do princípio da conservação dos momentos obtêm-se as equações de momento (das quais derivam as equações de Navier-Stokes) cuja modelação será na secção (1.2.), e, finalmente, do princípio físico da conservação da energia, resultam as equações de energia. Estas últimas não serão estudadas nesta dissertação.

Após a escolha do princípio a aplicar, a equação será modelada com recurso a um de quatro modelos seguintes (condicionados à escolha do elemento volúmico de controlo):

1. *Elemento finito volúmico de controlo, fixo no espaço.*

2. *Elemento finito volúmico de controlo, que se movimenta com o fluxo.*

3. *Elemento infinitesimal volúmico de controlo, fixo no espaço.*

4. *Elemento infinitesimal volúmico de controlo, que se movimenta com o fluxo.*

A aplicação de cada modelo implica uma equação diferente que pode ter a forma conservativa ou não conservativa, e pode ainda ser uma equação diferencial ou integral. Se considerarmos os modelos em que o elemento volúmico de controlo está fixo no espaço) a equação tem a *forma conservativa*, mas nos casos em que o elemento volúmico se move com o fluxo, a forma da equação será *não conservativa*. Por outro lado, a aplicação dos modelos em que se considera um elememento volúmico de controlo de volume finito resultam numa *equação integral*, enquanto que a *equação diferencial* se obtém no caso de termos um elemento volúmico de controlo do volume infinitesimal.

Por exemplo, se considerarmos o princípio físico da conservação da massa, aplicado a um elemento volúmico de controlo de volume finito, fixo no espaço, a equação que vamos obter será uma equação de continuidade, integral e na forma conservativa.

Devido ao facto de, nos modelos a observar, haver distinção entre o elemento volúmico *fixo* e o *em movimento*, temos necessidade de expressar claramente esta distinção nas derivadas consideradas.

0.4.2 Derivada substancial

Considere-se o caso do elemento de controlo que se move com o fluxo, por contra-posição ao em que o elemento está estacionário.

Designaremos por $P_X = (x, y, z, t)$ a sua posição no espaço $X = (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, no instante $t \geq 0$.

O vector velocidade $\vec{V}$ do elemento de controlo em P_X é idêntico ao da velocidade do fluxo, e denotá-lo-emos como $\vec{V}(P_X) = \mathbf{u}i + \mathbf{v}j + \mathbf{w}k$, sendo $\mathbf{u} = u(x,y,z,t)$, $\mathbf{v} = v(x,y,z,t)$ e $\mathbf{w} = w(x,y,z,t)$. Finalmente, designaremos por $\rho = \rho(x,y,z,t)$ a densidade do fluido em P_X.

Estudaremos, de seguida, a derivada da densidade, avaliada com recurso a duas posições $P_{X_i} = (x_i, y_i, z_i, t_i)\,,\ i = 1, 2$. Para simplificação dos cálculos, denote-se por $\vec{V_i} = \vec{V}\,(x_i, y_i, z_i, t_i)$

e $\rho_i = \rho\,(x_i, y_i, z_i, t_i)$, respectivamente, o vector velocidade e a função densidade do elemento de controlo em P_{X_i}.

A derivada usual $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ não tem em conta a movimentação do elemento de controlo no espaço, uma vez que este é aqui assumido estacionário. Todavia, no caso do modelo em que o elemento de controlo se desloca no espaço, então a densidade pode variar não só com o tempo, mas também com a deslocação espacial. Essa variação é observada quando desenvolvemos a função densidade em série de Taylor, em torno do ponto P_{X_1}. Vem assim,

$$\rho_2 - \rho_1 = grad\ \rho\,(x_1, y_1, z_1, t_1)\,.\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1) + o(P_{X_2} - P_{X_1}) \tag{8}$$

onde $grad = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$ e $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$, denota o vector gradiente nas variáveis espaciais.

Dividindo por $(t_2 - t_1)$ e ignorando os termos de ordem superior, obtemos a seguinte aproximação linear

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{P_{X_1}} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{P_{X_1}} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{P_{X_1}} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{P_{X_1}}. \tag{9}$$

Passando ao limite, $t_2 \to t_1$, teremos no primeiro membro de (9) a *derivada substancial da densidade* ρ, que denotaremos como $\frac{D\rho}{Dt} := \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}$.

Para o segundo membro, note-se que, no limite, se tem

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\ i\ +\ \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\ j\ +\ \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\ k \longrightarrow\ \vec{V}(P_{X_1}), \tag{10}$$

quando $t_2 \to t_1$. Donde, no limite, teremos para a derivada substancial da densidade a expressão,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \mathbf{u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{P_{X_1}} + \mathbf{v}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{P_{X_1}} + \mathbf{w}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{P_{X_1}} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{P_{X_1}}. \tag{11}$$

A expressão (11) designar-se-á por *derivada substancial* da densidade, que facilmente se verifica pode ser reescrita como

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\rho\right). \tag{12}$$

Note-se que a derivada substancial é o diferencial total de $\rho = \rho(x,y,z,t)$. Pela regra da cadeia obtemos

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}dz + \frac{\partial \rho}{\partial t}dt \tag{13}$$

donde resulta que

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{14}$$

Como $\frac{dx}{dt}=\mathbf{u}$, $\frac{dy}{dt}=\mathbf{v}$ e $\frac{dz}{dt}=\mathbf{w}$, a equação anterior fica:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\mathbf{u}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\mathbf{v}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\mathbf{w} \tag{15}$$

o que permite afirmar que $\frac{d\rho}{dt}=\frac{D\rho}{Dt}$.

No que vimos anteriormente, tomámos como exemplo a *densidade*, mas podemos aplicar a *derivada substancial* de outras funções, por exemplo a temperatura ou a pressão, já que estas também podem variar em diferentes posições do espaço, à medida que o fluído se desloca. Assim, do exemplo da função densidade, obtemos, para uma função $\mathbf{g}=g(x,y,z,t)$ a *Derivada substancial*:

$$\frac{D\mathbf{g}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}+\left(\vec{V}.\nabla\mathbf{g}\right) \tag{16}$$

Note-se que a expressão para a derivada substancial envolve duas parcelas distintas:

1. o termo $\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}$ que se designa por *derivada local*, e que, fisicamente, traduz a variação de $\mathbf{g}$ no tempo, num dado ponto do espaço.

2. o termo *derivada convectiva*: $\vec{V}.\nabla\mathbf{g}$ que descreve a variação de $\mathbf{g}$ no tempo e que entra em conta com o deslocamento do elemento volúmico para posições em que mudam as características do fluído.

Outro conceito importante para a modelação das equações é o da *divergência da velocidade*, $\nabla\cdot\vec{V}$, uma vez que este termo aparece frequentemente nas equações de fluídos. Na secção seguinte vamos estudar este conceito e o seu significado físico.

0.4.3 Estudo da divergência da velocidade

Considere-se o elemento volúmico $\mathcal{V}$, e de superfície $\mathcal{S}$, que se movimenta com o fluído, a certa velocidade $\vec{V}$.

A massa m deste elemento é constante, mas a variação da densidade em diferentes regiões do espaço conduz às variações do volume e da superfície $\mathcal{S}$, do elemento volúmico de controlo, à medida que este se desloca no espaço.

Para cada elemento de área $d\mathcal{S}$, denotaremos por $\triangle\mathcal{V}$ a variação do volume decorrente do movimento do elemento volúmico, por incremento de tempo $\triangle t$. Adicionalmente, $\triangle\mathcal{V}$ será visto como o volume de um cilindro, cuja área da base é dada por $d\mathcal{S}$ e a altura é estimada por $\triangle t\vec{V}\cdot\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal à superfície $\mathcal{S}$:

$$\triangle\mathcal{V} = \left[\left(\triangle t\vec{V}\right)\cdot\vec{n}\right]d\mathcal{S}$$

donde obtemos que a variação total do volume é dada por:

$$D\mathcal{V} = \int\int_{\mathcal{S}} \triangle t\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S}$$

Dividindo por $\triangle t$, obtemos a variação do volume, por unidade de tempo, na seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{V}}{Dt} &= \frac{1}{\triangle t}\int\int_{\mathcal{S}} \triangle t\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S} \\ &= \int\int_{\mathcal{S}} \vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência resulta:

$$\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \int\int\int_{\mathcal{V}} \left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\mathcal{V}$$

Consideremos uma variação $\delta\mathcal{V}$ do volume, suficientemente pequena para que $\nabla\cdot\vec{V}$ tenha aí essencialmente o mesmo valor. Então temos:

$$\frac{D\left(\delta\mathcal{V}\right)}{Dt} = \int\int\int_{\delta\mathcal{V}} \left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\mathcal{V}$$

e este integral pode ser estimado da seguinte forma:

$$\int\int\int_{\delta\mathcal{V}} \left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\mathcal{V} \approx \left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\delta\mathcal{V}$$

donde resulta

$$\frac{D\left(\delta\mathcal{V}\right)}{Dt} = \left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\delta\mathcal{V}$$

e daqui obtemos a expressão para a divergência da velocidade, $\nabla\cdot\vec{V}$, como sendo

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{1}{\delta\mathcal{V}}\frac{D\left(\delta\mathcal{V}\right)}{Dt} \tag{17}$$

Fisicamente, esta expressão traduz a variação do volume do elemento volúmico de controlo em movimento, por unidade de tempo.

Capítulo 1

Modelação das equações de fluxo

Este capítulo será dedicado à modelação das equações que regem a passagem de um fluxo através de um dado corpo com volume limitado. Como visto anteriormente, o processo de modelação de uma equação assenta na escolha do princípio físico e do modelo a utilizar. Todavia, restringirnos-emos aos princípios físicos da conservação da massa (o qual dará origem às equações ditas de continuidade), e da segunda lei de Newton (lei da conservação dos momentos, a qual dá origem às equações de momento).

A modelação destas equações pode encontrar-se em vários textos de mecânica de fluídos (ver [26], [9], [10], entre outros). Optámos por seguir [26].

Nos dois pontos seguintes trataremos da modelação das equações de continuidade e das equações de momento, e a partir destas últimas derivaremos as equações de Navier-Stokes.

1.1 Equações de continuidade

Como já foi referido, o princípio físico que iremos considerar para obtenção das equações de continuidade que regem o escoamento de um dado fluxo será o da conservação da massa. Este princípio será aplicado ao elemento volúmico de controlo nos quatro modelos atrás indicados, donde obteremos quatro equações distintas. Terminaremos esta secção demostrando a equivalência dessas mesmas equações.

1.1.1 Elemento finito volúmico de controlo, fixo no espaço

Consideremos um elemento volúmico $\mathcal{V}$ fixo no espaço, de volume finito

$$vol(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz < \infty,$$

mas com forma arbitrária e limitada. Adicionalmente, seja $d\sigma = \vec{n}d\mathcal{S}$, onde $\vec{n}$ é a normal unititária e exterior à superfície, e denote-se por $\vec{V}$ o campo vectorial que representa a velocidade do fluído em estudo.

O princípio físico da conservação da massa, aplicado ao elemento volúmico de controlo, estabelece que a massa que se escoa através da superfície deste é igual ao decréscimo de massa dentro do elemento volúmico. Assim, num primeiro passo calcularemos a massa que se escoa através da superfície $\mathcal{S}$ do elemento volúmico, por unidade de tempo (em quilogramas por segundo), e num segundo passo deduziremos a expressão para o decréscimo de massa dentro do elemento volúmico de controlo, por unidade de tempo.

Primeiro passo: expressão que traduz quantidade de massa que se escoa através da superfície $\mathcal{S}$.

O fluxo elementar de massa (por unidade de área) de um dado fluído em movimento, sobre uma determinada superfície $\mathcal{S}$, é dado pelo produto

$$fluxo = \rho\vec{V}^{\perp}d\mathcal{S} \tag{1.1}$$

onde $\vec{V}^{\perp}$ é a componente da velocidade perpendicular à superfície e ρ designa a densidade local do fluído. Tem-se assim

$$fluxo = \rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S}, \tag{1.2}$$

donde a expressão para o *fluxo de massa total*, que passa por $\mathcal{S}$, por unidade de tempo, é dada por

$$fluxo\ total = \int\int_{\mathcal{S}} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S}. \tag{1.3}$$

Segundo passo: expressão para o decréscimo de massa dentro do elemento volúmico de controlo, por unidade de tempo.

A massa m contida no elemento volúmico considerado é estimada a partir da densidade ρ e, portanto, temos

$$m = \int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz$$

donde, o decréscimo, por unidade de tempo, da massa do elemento volúmico de controlo é dado por

$$dec.\ de\ massa\ = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz\right) \tag{1.4}$$

De acordo com o princípio físico da conservação da massa, teremos assim a igualdade

$$\int\int_{\mathcal{S}} \rho\vec{V}.\vec{n}d\mathcal{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz\right). \tag{1.5}$$

A equação (1.5) representa a forma integral da equação de continuidade, na sua forma conservativa.

Equação 1.1.1 (Equação de integral de continuidade, forma conservativa) *Sejam $\mathcal{V}$ um elemento volúmico satisfazendo as condições inicialmente indicadas, $\vec{V}$ a velocidade do fluído que passa através de $\mathcal{V}$ e ρ a densidade do fluído.*

Então, a equação

$$\int\int_{\mathcal{S}} \rho\vec{V}.\vec{n}d\mathcal{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz = 0 \tag{1.6}$$

é a forma integral da equação de continuidade, para as equações de fluxo, na forma conservativa.

1.1.2 Elemento finito volúmico de controlo, que se movimenta com o fluxo

Nesta secção deduziremos a equação de continuidade que governa o escoamento de um fluído, na sua forma não conservativa. Esta resultará de considerarmos que o elemento volúmico de controlo se movimenta com o fluído, mas condicionado a

$$vol(\mathcal{V}) = \int\int\int_{\mathcal{V}} dxdydz = constante,$$

pelo que a equação a obter será uma equação integral.

Todavia, note-se que a sua forma pode variar com o deslocamento, uma vez que as densidade e velocidade do fluído são variáveis, que denotaremos, por $\rho = \rho(x,y,z,t)$ e $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z,t)$, respectivamente.

À semelhança da secção anterior, a massa de todo o elemento, em cada instante t, é dada por

$$m = \int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz.$$

O princípio da conservação da massa estabelece que a sua derivada substancial é nula, traduzindo a equação de continuidade que governa o fluxo, na forma *não conservativa*:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Dm}{Dt} \\ &= \frac{D}{Dt}\left(\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho \; dxdydz\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Equação 1.1.2 (Equação de integral de continuidade, forma não conservativa) *Sejam $\mathcal{V}$ um elemento volúmico de controlo em movimento, e de volume constante, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ a velocidade do fluído e $\rho = \rho(x, y, z, t)$ a sua densidade.*

Então, a equação

$$\frac{D}{Dt}\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho \; dxdydz = 0 \tag{1.8}$$

é a forma integral para a equação de continuidade, na sua forma não conservativa.

Em relação à distinção entre equações na forma conservativa e não conservativas, podemos observar que as equações na forma conservativa envolvem a divergência do fluxo de massa $\rho\vec{V}$ que passa através do elemento volúmico $\mathcal{V}$. Dado que as equações na forma conservativa, resultam de se aplicar um princípio físico a um modelo em que o elemento de controlo está fixo no espaço, para a sua modelação interessa o fluxo de massa sobre a sua superfície. Esta preocupação justifica a presença do termo da divergência em cada uma delas e permite fazer a distinção entre as duas formas das equações.

As equações que deduzimos nos dois pontos anteriores são equações integrais, pois em ambos os casos considerámos um elemento de controlo de volume finito. Vejamos de seguida os casos dos modelos do elemento volúmico infinitesimal, dos quais resultarão equações dife -renciais.

1.1.3 Elemento infinitesimal volúmico de controlo, fixo no espaço

Vamos agora aplicar o princípio físico da conservação da massa ao caso do elemento infinitesimal considerado ser estacionário no espaço - o que dará origem a uma equação diferencial, na forma conservativa, para a equação do fluxo.

Para a sua dedução, consideraremos um elemento volúmico infinitesimal, que denotamos por $d\mathcal{V} = dxdydz$, num referencial $Oxyz$. Novamente, sejam

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}(x,y,z,t)\\ &= (\mathbf{u}(x,y,z,t), \mathbf{v}(x,y,z,t), \mathbf{w}(x,y,z,t))\end{aligned}$$

e $\rho = \rho(x,y,z,t)$, respectivamente, a velocidade e a densidade do fluído na posição (x,y,z) e no instante t.

Tal como no caso 1.1.1, pretendemos escrever as expressões para o fluxo de massa e para o decréscimo de massa, por unidade de tempo, pois sabemos, pelo princípio físico que estamos a considerar, que estas quantidades são iguais.

Assim, sabemos que o fluxo de massa que atravessa a superfície $\mathcal{S}$ do elemento volúmico é dado por

$$\rho \vec{V}^{\perp} d\mathcal{S} \;=\; \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\mathcal{S}.$$

Analise-se, componente a componente, os termos desta forma diferencial, começando pela componente segundo xx.

O fluxo de massa nas faces perpendiculares ao eixo xx é dado por

$$fluxo = \rho \mathbf{u} \; dydz \tag{1.9}$$

uma vez que cada uma destas faces tem área $d\mathcal{S} = dy\, dz$ e a componente normal da velocidade é $\mathbf{u}$.

Como a velocidade e a densidade do fluído podem variar no espaço em que este se move, então os valores para o fluxo de massa serão diferentes em cada uma das faces. Esta diferença é dada por $\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho \mathbf{u})\, dx$. Assim, na face de trás o fluxo de massa é $\left[\rho \mathbf{u} + \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial x} dx\right] dydz$ donde resulta que o fluxo de massa que passa através da superfície do elemento volúmico de controlo, na direcção de xx ($fluxo_x$)é dado por

$$\begin{aligned} fluxo_x &= \left[\rho \mathbf{u} + \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial x} dx\right] dydz - \rho \mathbf{u} dydz \\ &= \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial x} dxdydz \end{aligned} \tag{1.10}$$

Da mesma maneira, deduzimos as componentes segundo yy e zz para o fluxo de massa e temos as seguintes expressões:

- *fluxo de massa na direcção de yy*:

$$\begin{aligned} fluxo_y &= \left[\rho\mathbf{v} + \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y}dy\right]dxdz - \rho\mathbf{v}dxdz \\ &= \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y}dxdydz \end{aligned} \tag{1.11}$$

- *fluxo de massa na direcção de zz*:

$$\begin{aligned} fluxo_z &= \left[\rho\mathbf{w} + \frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial z}dz\right]dxdy - \rho\mathbf{w}dxdy \\ &= \frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial z}dxdydz \end{aligned} \tag{1.12}$$

Portanto, o valor total do fluxo de massa que atravessa a superfície $\mathcal{S}$ do elemento volúmico, por unidade de tempo, é dado por

$$fluxo\ total = \left[\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial z}\right]dxdydz \tag{1.13}$$

Para finalizar a modelação desta situação, falta a expressão para o decréscimo de massa. Sendo a massa do elemento $\rho\ dxdydz$, o decréscimo de massa do elemento volúmico, por unidade de tempo, é dado por

$$dec.\ massa = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\ dxdydz.$$

De acordo com o príncipio da conservação da massa, obtemos a igualdade

$$\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial z}\right]dxdydz = -\frac{\partial}{\partial t}\rho dxdydz$$

ou seja,

$$\left[\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\mathbf{w})}{\partial z}\right] + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.14}$$

de onde resulta a equação diferencial para a equação de continuidade, na forma conservativa

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}\right) = 0. \tag{1.15}$$

Equação 1.1.3 (Equação de diferencial de continuidade, forma conservativa) *Sejam $\mathcal{V}$ um elemento de volume infinitesimal fixo no espaço, $\vec{V}$ e ρ, respectivamente, a velocidade e a densidade do fluído que passa através de $\mathcal{V}$. A equação*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \tag{1.16}$$

representa a forma diferencial da equação de continuidade, para as equações de fluxo, na sua forma conservativa.

1.1.4 Elemento infinitesimal volúmico, que se movimenta com o fluxo

Nesta secção vai ser deduzida e equação diferencial na forma não conservativa, pela aplicação do princípio físico da conservação da massa a um elemento volúmico infinitesimal, em movimento. Seja $\delta\mathcal{V}$ o volume infinitesimal do elemento de controlo e m a sua massa (constante).

Denote-se por $\rho = \rho(x, y, z, t)$ e $\vec{V} = (x, , y, z, t)$, respectivamente, as densidade e velocidade do fluído.

Temos então que

$$m = \rho\delta\mathcal{V}, \tag{1.17}$$

e, por que a massa é constante, a sua derivada substancial é nula, isto é

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Dm}{Dt} \\ &= \frac{D(\rho\delta\mathcal{V})}{Dt} \\ &= \delta\mathcal{V}\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{D\delta\mathcal{V}}{Dt} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Tendo em conta a definição da divergência da velocidade (17), podemos reescrever esta equação na forma seguinte:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla.\vec{V} = 0 \tag{1.19}$$

A expressão anterior diz-se a equação de continuidade não conservativa, na sua forma diferencial.

Equação 1.1.4 (Equação diferencial de continuidade, forma não conservativa) *Sejam $\mathcal{V}$ um elemento de volume infinitesimal, que se movimenta com velocidade $\vec{V}$ idêntica à velocidade do fluído que passa através de $\mathcal{V}$ e ρ a densidade do fluído. Então, a equação*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla.\vec{V} = 0 \tag{1.20}$$

é a equação diferencial de continuidade para as equações de fluxo, na forma não conservativa.

Nos quatro pontos anteriores deduzimos quatro formas para a equação de continuidade. Apesar de estas equações serem diferentes entre si, mostraremos a seguir que as quatro são equivalentes, o que, em termos práticos, permite poder usar qualquer uma das quatro equações, conforme o caso concreto com que se esteja a trabalhar.

1.2 Equivalência das equações de continuidade para o fluxo

Nesta seção mostraremos a equivalência das equações 1.1.1 a 1.1.4 deduzidas.

Teorema 1.2.1 *Sejam $\mathcal{V}$ um elemento volúmico de superfície $\mathcal{S}$, $\vec{V}$ a velocidade do fluído que se desloca atrvés de $\mathcal{V}$ e ρ a sua densidade. Então, as equações 1.1.1 a 1.1.4 são equivalentes.*

Demonstração:

Começamos por mostrar que as equações conservativas são equivalentes.

- **as equações 1.1.1 e 1.1.3 são equivalentes**

  Neste caso, a forma de conservação não é alterada.

  Da equação 1.1.1 vem

$$\int\int_{\mathcal{S}} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{\mathcal{V}} \rho dxdydz = 0$$

  Uma vez que o elemento de volume é fixo e limitado no espaço, os limites de integração são constantes. Assuma-se, sem perca de generalidade, que a função densidade é contínua. Então podemos comutar a derivação com a integração, obtendo

$$\int\int_{\mathcal{S}} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S} + \int\int\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz = 0$$

  e, aplicando o teorema da divergência ao primeiro termo, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)dxdydz + \int\int\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz \\ &= \int\int\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right]dxdydz \end{aligned} \tag{1.21}$$

  Da arbitrariedade do elemento volúmico $\mathcal{V}$ vem que este integral é se e só se a função integranda o fôr, ou seja

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

  Deste modo, obtivemos a equivalência entre a forma diferencial e integral da equação de fluxo, ambas na forma conservativa.

- **as equações 1.1.3 e 1.1.4 são equivalentes**

Antes de passar à prova da equivalência das equações, consideremos uma identidade sobre o gradiente do produto de um escalar por um vector, que será necessária:

$$\nabla \cdot \left(\rho\vec{V}\right) = \rho\nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla\rho \tag{1.22}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\rho\vec{V}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \partial x_i \left(\rho V_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\partial x_i \rho\right) V_i + \rho \left(\partial x_i V_i\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} V_i \left(\partial x_i \rho\right) + \rho\nabla \cdot \vec{V} \\ &= \vec{V} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

De 1.1.3 temos

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla . \left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

donde, tendo em conta a igualdade (1.22), resulta

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Pela definição de derivada substancial, (12), obtemos da equação anterior

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{1.23}$$

o que prova a equivalência entre as formas conservativa e não conservativa das equações de fluxo.

De seguida vamos analisar o caso das equações integrais e provar que estas são equivalentes.

- **as equações 1.1.2 e 1.1.1 são equivalentes**

Consideremos a equação 1.1.2

$$\frac{D}{Dt} \int\int\int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0 \tag{1.24}$$

Recordemos que o elemento é constituído por elementos infinitesimais, cada um deles com massa fixa e volume $\delta\mathcal{V}$, que pode alterar-se à medida que o elemento se move.

Da mesma forma que no primeiro ponto, a derivação comuta com a integração, donde se obtém

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\int\int\int_{\mathcal{V}}\rho d\mathcal{V}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{D\left(\rho d\mathcal{V}\right)}{Dt}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{D\rho}{Dt}d\mathcal{V}+\int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{\left(Dd\mathcal{V}\right)}{Dt}\rho=0\\
&\Leftrightarrow \quad \int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{D\rho}{Dt}d\mathcal{V}+\int\int\int_{\mathcal{V}}\rho\left[\frac{1}{d\mathcal{V}}\frac{D\left(d\mathcal{V}\right)}{Dt}\right]d\mathcal{V}=0
\end{aligned}$$

Pelas definições de derivada substancial (12) e divergência da velocidade (17), podemos escrever

$$\int\int\int_{\mathcal{V}}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\vec{V}\right]d\mathcal{V}=0.$$

e considerando a identidade (1.22), obtemos

$$\int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\mathcal{V}+\int\int\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)d\mathcal{V}=0$$

Aplicando o Teorema da Divergência no segundo integral, obtemos a equação 1.1.1:

$$\int\int\int_{\mathcal{V}}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\mathcal{V}+\int\int_{\mathcal{S}}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}d\mathcal{S}=0$$

ficando assim provada a equivalência das equações integrais para as equações de fluxo.

■

Comentário

Note-se que a forma integral da equação de continuidade para o fluxo permite a presença de descontinuidades no interior do elemento volúmico de controlo, fixo no espaço. Todavia, a forma diferencial pressupõe a diferenciabilidade das funções intervinientes, logo a sua continuidade. Tais suposições tornam-se evidentes quando se aplica o teorema da divergência para obter a forma diferencial das equações de continuidade para o fluxo, a partir da sua forma integral, uma vez que este teorema assume a existência das propriedades de continuidade do fluxo.

Por permitir descontinuidades, a forma integral da equação de continuidade é considerada mais *fundamental* do que a forma diferencial.

Estas observações têm particular importância quando se consideram fluxos descontínuos, como as ondas de choque.

1.3 Equações de momento

Nesta secção iremos aplicar o princípio físico da segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, a um elemento volúmico de controlo $\mathcal{V}$. Como já foi referido, da aplicação deste príncípio físico resultam as equações de momento para o escoamento de fluxos, dais quais derivam as equações de Navier-Stokes.

Para a sua modelação apenas consideramos um dos modelos atrás indicados. Especificamente, utilizaremos o modelo do elemento de controlo de volume infinitesimal, em movimento. Note-se, contudo, que as equações de momento para o fluxo podem ser deduzidas recorrendo a qualquer um dos outros três modelos. Como mostrámos no caso da equações de continuidade, cada modelo origina uma equação diferente, mas ainda assim, todas equivalentes entre si.

1.3.1 Equações de momento não conservativas ou equações de Navier-Stokes

Consideremos um elemento volúmico infinitesimal, dito $d\mathcal{V} = dxdydz$, em movimento, num referencial $Oxyz$. Sejam $\vec{V} = (\mathbf{u}(x, y, z, t), \mathbf{v}(x, y, z, t), \mathbf{w}(x, y, z, t))$ e $\rho = \rho(x, y, z, t)$, respectivamente, a velocidade e a densidade do fluído na posição (x, y, z) e no instante t.

Porque $\vec{F} = m\vec{a}$ é uma relação vectorial, pode ser escrita em três relações escalares segundo cada um dos eixos Ox, Oy e Oz. Assim, a sua componente segundo xx é dada por

$$F_x = ma_x \tag{1.25}$$

onde F_x e a_x são as componentes segundo xx, respectivamente, da força e da aceleração.

A força resultante no elemento volúmico tem origem em forças que actuam directamente na sua massa volúmica (força gravitacional, forças magnéticas...) ou em forças que actuam na sua superfície (a pressão imposta pelo fluído que envolve o elemento volúmico e os cisalhamentos que actuam na superfície exterior, por fricção).

Denotemos por $\vec{f}$ as forças que actuam directamente na massa volúmica por unidade de massa - donde f_x será a sua componente segundo xx. Sendo o volume do elemento $(dx\ dy\ dz)$, a componente segundo xx da força que actua directamente na massa volúmica é dada por

$$\rho f_x(dxdydz).$$

Analisemos agora as forças de superfície. Para tal, denotemos por τ_{ij} a força de cisalhamento na direcção de j, exercida no plano perpendicular ao eixo i.

No que se segue iremos estudar a acção de cada uma das tensões tangenciais na direcção de xx e para tal encararemos o elemento volúmico de controlo como um paralelepípedo. Consideremos primeiro as faces contidas em planos perpendiculares ao eixo Oy.

Assim, na face esquerda, temos que a força que se deve à tensão tangencial é $\tau_{yx}dx\,dz$. Na face direita, que está à distância dy da face esquerda, a tensão é dada por $\left[\tau_{yx}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right]dx\,dz$.

Por um raciocínio análogo, podemos escrever as forças de cisalhamento para as outras faces:

- faces contidas em planos perpendiculares ao eixo Ox:

  Na face de trás temos $\tau_{xx}dydz$ e na face da frente a expressão para a tensão é da por $\left[\tau_{xx}+\dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}dx\right]dydz$.

- faces contidas em planos perpendiculares ao eixo Oz:

  Na face da base é exercida a tensão $\tau_{zx}dxdy$ e na face do topo temos $\left[\tau_{zx}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right]dxdz$.

Nas faces perpendiculares ao eixo dos xx actua ainda a pressão imposta pelo fluído. Temos a força $p\ dydz$, na face de trás e na face da frente $\left[p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right]dydz$.

Assim, podemos então escrever, para a direcção dos xx a expressão para a força resultante na superfície da forma seguinte:

$$\begin{aligned}F_{sup} &= \left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]+\left[\left(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}dx\right)-\tau_{xx}\right]dydz\\ &+ \left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)-\tau_{yx}\right]dxdz+\left[\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)-\tau_{zx}\right]dxdy\\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (1.26)\end{aligned}$$

Assim, a força total (forças exercidas no corpo e forças exercidas na sua superfície), na direcção de xx é dada por

$$F_x=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz+\rho f_x dxdydz \qquad (1.27)$$

Recordemos que $m=\rho\ dxdydz$ e que a aceleração do elemento volúmico de controlo é a variação da velocidade em relação ao tempo, isto é $a_x=\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$, onde a_x é a componente da aceleração segundo xx. Então, substituindo na equção (1.25), obtemos a componente dos xx para a segunda lei de Newton:

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x. \qquad (1.28)$$

Esta equação representa a componente dos xx da equação do momento, para as equações de fluxo, na sua forma conservativa.

Analogamente, para a componente segundo yy temos

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \tag{1.29}$$

e para a componente dos zz

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \tag{1.30}$$

As equações anteriores são chamadas ***equações de Navier-Stokes*** e modelam a passagem de um fluído através de um dado elemento de controlo.

Stokes derivou também as equações completas, onde trabalhou com fluídos newtonianos - fluídos em que a tensão tangencial é proporcional ao gradiente da velocidade, e obteve as seguintes expressões:

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\nabla . \vec{V} \right) + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \tag{1.31}$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\nabla . \vec{V} \right) + 2\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \tag{1.32}$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left(\nabla . \vec{V} \right) + 2\mu \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \tag{1.33}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right] \tag{1.34}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right] \tag{1.35}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right] \tag{1.36}$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade molecular e λ é o segundo coeficiente de viscosidade.

Stokes trabalhou com a hipótese de que $\lambda = -\frac{2}{3}\,\mu$. Esta hipótese ainda não foi confirmada, mas é muito utilizada.

Substituindo as expressões (1.31), (1.34) e (1.35) na equação

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

obtemos

$$\begin{aligned}\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\vec{V})+\mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial x\partial z}\right)+\rho f_x\\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\vec{V})+\rho f_x\end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\triangle\mathbf{u}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\vec{V}) \tag{1.37}$$

Fazendo o mesmo para as componentes de yy e zz e combinado todas as componentes, obtemos a equação completa de Navier-Stokes, na sua forma não conservativa:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{F}-\nabla p+\mu\triangle\vec{V}-\frac{2}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot\vec{V}) \tag{1.38}$$

No caso de o fluído ser incompressível teremos $\nabla\cdot\vec{V}=0$, donde resulta a equação

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\vec{V} \tag{1.39}$$

com $\nu=\frac{\mu}{\rho}$.

Equação 1.3.1 (Equação de Navier-Stokes para fluídos incompressíveis) *Seja $\mathcal{V}$ um elemento volúmico de controlo, através do qual se move um dado fluído (incompressível) com velocidade $\vec{V}$. Adicionalmente, sejam ν o coeficiente de viscosidade do fluído, p a pressão e $\vec{F}$ a força exercida pelo fluído no elemento de controlo.*

Então a equação que rege o escoamento deste fluído é dada por

$$\frac{D\vec{V}}{Dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\vec{V} \tag{1.40}$$

e é chamada equação de Navier-Stokes, para fluídos incompressíveis, na sua forma não conservativa.

1.3.2 Equações de Navier-Stokes na forma conservativa

Recorrendo a algumas das relações que foram estudadas em secções anteriores podemos deduzir as equações do momento na forma conservativa, e consequentemente, a forma conservativa das equações de Navier-Stokes. Da primeira componente para as equações de Navier-Stokes, na forma não conservativa, deduzida na secção anterior, temos que

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x \tag{1.41}$$

Da definição de derivada substancial obtemos

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho\vec{V}.\nabla\mathbf{u} \tag{1.42}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}=\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

donde resulta

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}-\mathbf{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{1.43}$$

Tendo em conta a relação (1.22) temos

$$\left(\rho\vec{V}\right).\nabla\mathbf{u}=\nabla.\left(\rho\mathbf{u}\vec{V}\right)-\mathbf{u}\nabla.\left(\rho\vec{V}\right). \tag{1.44}$$

Substuindo as expressões (1.43) e (1.44) em (1.42), obtemos

$$\begin{aligned}\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}-\mathbf{u}\frac{\rho}{\partial t}-\mathbf{u}\nabla.\left(\rho\vec{V}\right)+\nabla.\left(\rho\mathbf{u}\vec{V}\right)\\ &= \frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}-\mathbf{u}\frac{\rho}{\partial t}-\mathbf{u}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}\right)\right]+\nabla.\left(\rho\mathbf{u}\vec{V}\right)\end{aligned} \tag{1.45}$$

Pela equação de continuidade 1..1.3, sabemos que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\vec{V}\right)=0$$

assim, a expressão anterior fica

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\mathbf{u}\vec{V}\right) \tag{1.46}$$

Seguindo o mesmo procedimento para cada uma das outras componentes e substituindo nas equações de momento, obtemos as *equações de Navier-Stokes na forma conservativa*:

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\mathbf{u}\vec{V}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\mathbf{v}\vec{V}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y \tag{1.48}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\mathbf{w}\right)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\mathbf{w}\vec{V}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+\rho f_z \tag{1.49}$$

Denotando por $\tau_x=(\tau_{xx},\tau_{yx},\tau_{zx})$ a componente da tensão exercida na direcção de x e fazendo o mesmo para as direcções de y e z, podemos definir uma matriz $\tau\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, que é a matriz das componentes da tensão em cada uma das faces, respectivamente na direcção de x, y e z.

Assim, temos que, cada componente da variação da tensão é descrita por

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}=\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x},\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y},\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{\partial\tau_x}{\partial x} \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x},\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y},\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)=\frac{\partial\tau_y}{\partial y} \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x},\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y},\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)=\frac{\partial\tau_z}{\partial z} \tag{1.52}$$

ou $\nabla\tau=\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial x},\frac{\partial\tau_y}{\partial y},\frac{\partial\tau_z}{\partial z}\right)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$.

Podemos então escrever estas equações da seguinte forma:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla p+div(\nabla\tau)+\rho\vec{f}$$

Equação 1.3.2 (Equação de Navier-Stokes, forma conservativa) *Seja $\mathcal{V}$ um elemento volúmico de controlo, através do qual se move um dado fluído $\vec{V}$. Adicionalmente, sejam ν o coeficiente de viscosidade do fluído, p a pressão, $\vec{f}$ a força exercida pelo fluído na massa volúmica do elemento de controlo e $\tau\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, a matriz das componentes da tensão em cada uma das faces, respectivamente na direcção de x,y e z, como definido anteriormente.*

Então a equação que rege o escoamento deste fluído é dada por

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=-\nabla p+div(\nabla\tau)+\rho\vec{f} \tag{1.53}$$

e é chamada equação de Navier-Stokes, na forma conservativa.

As equações de Navier-Stokes completas, na forma conservativa, são obtidas de forma semelhante ao caso de (1.40), introduzindo as expressões das tensões (1.31)-(1.36) nas equações anteriormente deduzidas. Assim teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\mathbf{uv})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\mathbf{uw})}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right)\right]\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}\right)\right]+\rho f_x \end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}^{2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{w}\right)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\right)\right]+\rho f_{y} \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\rho\mathbf{w}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{u}\mathbf{w}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{w}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\mathbf{w}^{2}\right)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\right)\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla.\vec{V}+2\mu\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}\right)+\rho f_{z} \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Existência e unicidade de soluções fracas para o problema de Stokes

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de soluções fracas para o problema de Stokes, com base em [10]. Este problema consiste numa versão simplificada do problema envolvendo as equações de Navier-Stokes, mas cuja solução está em estreita relação com a das equações de Navier-Stokes. Com efeito, as equações de Stokes representam uma forma linearizada, e estacionária, das equações de Navier-Stokes deduzidas no capítulo anterior.

No que se segue, suporemos que lidamos com uma corrente contínua, correspondente à passagem de um dado fluído através de um domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. Além disso, analisaremos apenas o caso de fluído incompressível.

Sejam ρ a densidade (constante) do fluído e μ o coeficiente de viscosidade. Adicionalmente, sejam $\pi = \pi(x,t)$ a pressão, e $F = F(x,t)$ a força, exercidas pelo fluído no ponto $x \in \Omega$ e no instante t.

A velocidade $\mathbf{v} = (v_1(x,t), \dots, v_n(x,t))$ do fluído satisfará então as seguintes equações:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}.\triangle\mathbf{v}\right) = \mu\triangle\mathbf{v} - \nabla\pi - F \tag{2.1}$$

sujeito à restrição

$$\nabla.\mathbf{v} = 0 \tag{2.2}$$

a qual traduz a condição de incompressibilidade do fluído.

Consideremos o problema estacionário

$$\nu \triangle\mathbf{v} = \mathbf{v}.\nabla\mathbf{v} + \nabla p + f$$

sujeito a

$$\nabla.\mathbf{v} = 0, \tag{2.3}$$

onde $f = \frac{F}{\rho}$, $p = \frac{\pi}{\rho}$ e $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é o coeficiente de viscosidade cinética.

Pressupondo que a corrente em questão é lenta, temos a simplificação

$$\frac{|\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}|}{|\nu\triangle\mathbf{v}|} \approx 0$$

e assim, a redução do problema inicial (2.3) ao caso do problema de Stokes

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla p + f$$

$$\nabla.\mathbf{v} = 0 \tag{2.4}$$

onde supomos, sem perca de generalidade, que $\nu = 1$.

2.1 Existência e unicidade de soluções q-fracas

No que se segue, consideraremos o espaço das funções teste de divergência nula, que denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$. Teremos então o espaço $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty,\ \nabla \cdot \varphi = 0\}$.

Vamos analisar a existência de soluções fracas em espaços de Sobolev homogéneos $D_q^k(\Omega)$.

Definição 2.1.1 Espaços de Sobolev homogéneos: D_p^k

Seja $\Omega \neq \emptyset$ um domínio aberto, contido em $\mathbb{R}^n$. Para $k \geq 0,\ 1 \leq p < \infty$ definimos

1. *O espaço de Sobolev Homogéneo*

$$D_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L_1^{loc}(\Omega) :\ D^l u \in L_p,\ |l| = k \right\}.$$

2. *$D_{0,m}^k(\Omega)$ como o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma*

$$|u|_{p,k} = \left(\sum_{|l|=k} \int_\Omega |D^l u|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. *O espaço dual $D_{p'}^{-k} = (D_p^k)'$, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Definimos ainda os espaços $\mathcal{D}^1_{0,q}(\Omega)$, como o completamento de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma de $D^1_{0,q}(\Omega)$. Consideraremos também os espaços

$$\overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^1_{0,q}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in D^1_{0,q}(\Omega) : \ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega\}.$$

Nota:

Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ é limitado e satisfaz a condição do cone, tem-se $\mathcal{D}^1_{0,q}(\Omega) = \overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^1_{0,q}(\Omega)$, para $1 \leq q < \infty$.

Além disso, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, tem-se $D^1_{0,q}(\Omega) = W^1_{0,q}(\Omega)$. [10] #

Suponha-se conhecida $\mathbf{v}_* = \mathbf{v} \mid_{\partial\Omega}$, a restrição de $\mathbf{v}$ à fronteira $\partial\Omega$ (dita *condição de aderência*).

Sendo Ω limitado teremos também a condição de compatibilidade $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_*.\vec{n}\ dS = 0$, que expressa que a quantidade de fluído que entra em Ω é igual à que sai.

Estude-se agora a existência e unicidade de soluções fracas para o problema de Stokes

$$\begin{aligned} \triangle \mathbf{v} &= \nabla p + f, \text{ em } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{v} \mid_{\partial\Omega} &= \mathbf{v}_* \end{aligned} \tag{2.5}$$

sujeito à condição de compatibilidade

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_* \cdot \vec{n}\ dS = 0.$$

Recorra-se à formulação fraca deste problema. Para tal, considere-se a funcional linear contínua induzida pelo primeiro membro de (2.5). Sendo φ uma função teste arbitrária de $\mathcal{D}(\Omega)$ teremos

$$< \Delta \mathbf{v} - \nabla p, \varphi > = < f,\ \varphi > . \tag{2.6}$$

Por uma questão de simplificação da notação a apresentar, escreveremos

$$< \triangle \mathbf{v},\ \varphi > = < \nabla p,\ \varphi > + < f, \varphi >$$

em vez de (2.5).

Se integrarmos por partes, do termo $< \triangle \mathbf{v},\ \varphi >$ resulta,

$$< \triangle \mathbf{v}, \varphi > = - < \nabla \mathbf{v},\ \nabla\varphi > \tag{2.7}$$

e de $< -\nabla p,\ \varphi >$ obtemos

$$< -\nabla p,\ \varphi >=< p, \nabla \cdot \varphi >= 0 \tag{2.8}$$

uma vez que $\varphi \in D(\Omega)$.

Substituindo no primeiro membro de (2.6) obtemos o problema de Stokes escrito na sua forma fraca:

$$< \nabla \mathbf{v},\ \nabla\varphi >= - < f,\ \varphi > \tag{2.9}$$

No caso mais geral, consideramos que $< f,\ \varphi >$ está definido por uma funcional f em $D^{-1}_{0,q}(\Omega)$ e que $\mathbf{v} \in D^1_q(\Omega)$, para algum $q \in]1, \infty[$. Se a velocidade na fronteira é nula então impõe-se que $\mathbf{v} \in D^1_{0,q}(\Omega)$.

Assim, podemos definir *solução fraca para o problema de Stokes* da forma a seguir indicada:

Definição 2.1.2 Solução q-fraca

Um campo vectorial $\mathbf{v} :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma solução q-fraca para o problema de Stokes se e só se:*

(i) $\mathbf{v} \in D^1_q(\Omega)$;

(ii) $< \nabla \cdot \mathbf{v}, \varphi >= 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(iii) $\mathbf{v} \mid_{\partial\Omega}= \mathbf{v}_* \neq 0$, *ou alternativamente, se* $\mathbf{v}_* = 0$ *então* $\mathbf{v} \in D^1_{0,q}(\Omega)$;

(iv) $\mathbf{v}$ *verifica* $< \nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi >= - < f, \varphi >, \forall\varphi \in \mathcal{D}^1_{0,q'}(\Omega)\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

(Se $q = 2$ *a solução diz-se solução fraca.)*

Considerando uma função teste $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$ podemos escrever uma versão equivalente a (2.9), incluindo a pressão p:

$$< \nabla\mathbf{v}, \nabla\psi >= - < f, \psi > + < p, \nabla.\psi >, \forall\psi \in C^\infty_0(\Omega) \tag{2.10}$$

A formulação do problema de Stokes no sentido distribucional

$$< \nabla\mathbf{v}, \nabla\varphi >= - < f, \varphi >, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.11}$$

reduz o problema clássico de determinar a velocidade do fluído $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ e a pressão p ao problema de encontrar apenas $\mathbf{v}$, já que a existência de p fica garantida pelo lema seguinte.

Lema 2.1.3 *Sejam* Ω *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^n$, $f \in W^{-1}_{0,q}(\Omega')$, $1 < q < \infty$, *para* $\Omega' \subset \Omega$ *e limitado, com* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

1. Um campo vectorial $\mathbf{v} \in W^1_{loc,q}(\Omega)$ *satisfaz* $< \nabla \mathbf{v}, \nabla \varphi >= - < f, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *se e só se existe um campo de pressão* $p \in L^{loc}_q(\Omega)$ *que verifica*

$$< \nabla \boldsymbol{v}, \nabla \psi >= - < f, \psi > + < p, \nabla . \psi >, \ \forall \psi \in C^\infty_0(\Omega).$$

2. Se

(i) Ω *é limitado e satisfaz a condição do cone,*

(ii) $f \in D^{-1}_{0,q}(\Omega)$,

(iii) $\mathbf{v} \in D^1_q(\Omega)$,

então $p \in L^q(\Omega)$.

Note-se que $W^{-1}_{0,q}$ designa o espaço dual de $W^1_{0,q'}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, onde $W^1_{0,q'}$ é o completamento de $L_{q'}(\Omega)$ na norma

$$\| \ f \ \|_{-1,q} = sup_{\|u\|_{1,q'}=1} |\mathcal{F}(u)|$$

para $\mathcal{F}(u) =< f, \ u >$, funcional em $u \in W^1_{0,q'}$.

Passemos agora à prova do lema.

Demonstração: Mostraremos que (2.11) implica (2.10), sendo a implicação recíproca imediata.

Consideremos a funcional $\mathcal{F}(\psi) =< \nabla \mathbf{v}, \nabla \psi > + < f, \psi >$ para $\psi \in D^1_{0,q'}(\Omega')$.

Por hipótese, $\mathcal{F}$ é limitada em $D^1_{0,q'}(\Omega')$ e identicamente nula em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então, por continuidade é também identicamente nula em $\mathcal{D}^1_{0,q'}(\Omega')$. Dada a arbitrariedade de Ω, pelo Teorema B.0.4, podemos dizer que $\mathcal{F}$ admite a representação

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_\Omega p \ \nabla \cdot \psi, \ \ para \ \psi \in \mathrm{C}^\infty_0(\Omega),$$

donde resulta que

$$< \nabla \mathbf{v}, \nabla \psi > + < f, \psi >=< p, \nabla \cdot \psi > .$$

Assim, deduzimos que existe $p \in L^{loc}_q(\Omega)$ que satisfaz a condição (2.10), para $\psi \in C^\infty_0(\Omega)$.

2. Se Ω é limitado e satisfaz a condição do cone, então pelo Teorema B.0.5, existe um campo de pressão $p' \in L_q(\Omega)$, unicamente determinado tal que

$$\int_\Omega p' = 0$$

e

$$\mathcal{F}(\psi) =< p', \nabla . \psi > \tag{2.12}$$

para qualquer $\psi \in D^1_{0,q'}(\Omega)$.

Por (2.10) e por (2.12) temos

$$< p - p', \nabla.\psi >= 0$$

para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, donde resulta que $p = p' + const.$ e se considerarmos pela condição $\int_\Omega p = 0$, então podemos tomar $p = p'$. ■

Apresentamos a seguir um teorema que garante a existência e unicidade de soluções fracas no caso de funções $f \in D^{-1}_{0,2}(\Omega)$ e $\mathbf{v}_* \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Teorema 2.1.4 *Sejam Ω - domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziano, $f \in D^{-1}_{0,2}(\Omega)$ e $\mathbf{v}_* \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

1.Se $\mathbf{v}_*$ verifica $\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_*.\boldsymbol{n} = 0$, então existe uma e uma só solução fraca $\mathbf{v}$ para o problema de Stokes (2.5).

2. Se p é o campo de pressão associado a $\mathbf{v}$ pelo lema 2.1.3, então é válida a seguinte estimativa:

$$\| \mathbf{v} \|_{1,2} + \| p \|_2 \leq c \left(\| f \|_{-1,2} + \| \mathbf{v}_* \|_{\frac{1}{2},2(\partial\Omega)} \right)$$

onde $c = c(n, \Omega)$

Demonstração: Do Teorema B.0.7 podemos concluir a existência de uma extensão, $V \in W_2^1(\Omega)$, de v_*, tal que

$$\| V \|_{1,2} \leq c_1 \| v_* \|_{\frac{1}{2},2(\partial\Omega)} \tag{2.13}$$

sendo c_1 uma constante independente de V e de $\boldsymbol{v}_*$. Assim, procuramos uma solução generalizada da forma $v = w + V$, para $w \in \mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$ e que satisfaz a identidade

$$< \nabla w, \nabla\varphi >= - < f, \varphi > - < \nabla V, \nabla\varphi > \tag{2.14}$$

para $\varphi \in \mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$.

A funcional do lado direito da igualdade (2.14) é linear e limitada em $\mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$, donde, aplicando o Teorema da representação de Riesz (Teorema B.0.10), conclui-se que existe um e só um $w \in \mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$ que verifica (2.14), o que prova a existência da solução.

Para provar a unicidade da solução, considere-se $\mathbf{v}_1$ uma outra solução fraca. O teorema B.0.8 garante que $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ é um elemento de $\overset{\wedge}{\mathcal{D}}{}^1_2(\Omega)$ e consequentemente de $\mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$. Por outro lado, por (iv) da definição de solução fraca, resulta que $< \nabla u, \nabla\varphi >= 0$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{D}^1_{0,2}(\Omega)$, logo $\mathbf{u} = 0$ *a.e.* em Ω.

A prova da estimativa resulta de consideramos $\varphi = w$ na igualdade (2.14) e aplicar a desigualdade de Schwarz, tendo em conta que

$$|\mathcal{F}(u)| \leq \| f \|_{-1,q'} \| u \|_{1,q},$$

onde $\mathcal{F}(u) =< f, u >$, para $f \in L_q(\Omega.)$

Assim, pela estimativa (2.13), pelo Teorema B.0.3, obtém-se

$$\| w \|_{1,2} \leq c_2 \left(\| f \|_{-1,2} + \| \mathbf{v}_* \|_{\frac{1}{2},2(\partial\Omega)} \right) \tag{2.15}$$

A estimativa resulta agora de (2.13) e de (2.15). ■

2.2 Solução fundamental do problema de Stokes e o problema não homogéneo

Nesta secção pretendemos determinar as soluções do problema de Stokes não homogéneo, em $\mathbb{R}^n$. Para tal, começamos por introduzir a solução fundamental do problema de Stokes.

Tome-se $\Phi\left(|\cdot|\right)$ a solução fundamental para a equação biharmónica $\Delta^2 u(x) = 0$. A partir desta, construímos o tensor $\mathbf{U}$, definido por

$$U_{ij}(x-y) = \left(\delta_{ij} \triangle - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial yj} \right) \Phi\left(|x-y|\right) \tag{2.16}$$

e o campo vectorial $\mathbf{q}$ dado por

$$q_j(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_j} \triangle\Phi(|x-y|) \tag{2.17}$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, δ_{ij} é a função delta de Kronecker e $\Phi(t)$ é uma função em $\mathbb{R}$ e suave para $t \neq 0$.

Verifica-se que, para $x \neq y$ e para todo $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$ satisfazem

$$\Delta U_{ij}(x-y) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x-y) = \delta_{ij} \Delta^2 \Phi\left(|x-y|\right) \tag{2.18}$$

e também

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_{ij}(x-y) = 0 \tag{2.19}$$

Exemplos [10]:

- $n = 2$:

$$\Phi\left(|x-y|\right) = \frac{|x-y|^2 log(|x-y|)}{8\pi}$$

sendo $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$ dados por:

$$U_{i,j}(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{ij} log\frac{1}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\right] \tag{2.20}$$

$$q_j(x-y) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^2} \tag{2.21}$$

- $n = 3$:

$$\Phi(|x-y|) = -\frac{|x-y|}{8\pi}$$

e a partir desta, constrói-se o tensor $\mathbf{U}$, com

$$U_{ij}(x-y) = -\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\right] \tag{2.22}$$

e o campo vectorial $\mathbf{q}$

$$q_j(x-y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^3}. \tag{2.23}$$

- Para $n = 4$, a função Φ é dada por

$$\Phi(|x-y|) = -\frac{1}{8\pi^2}\log|x-y|, \tag{2.24}$$

e para $n \geq 4$, temos

$$\Phi(|x-y|) = \left[\frac{\Gamma(n/2-2)}{16\pi^{n/2}}\right]|x-y|^{4-n}. \tag{2.25}$$

Então, para $n \geq 4$, o par $(\mathbf{U}, \mathbf{q})$ é dado por

$$U_{ij}(x-y) = -\frac{1}{2n(n-2)\sigma_n}\left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^{n-2}} + (n-2)\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^n}\right] \tag{2.26}$$

$$q_j(x-y) = \frac{1}{n\sigma_n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}. \tag{2.27}$$

Da escolha de $\Phi(|\cdot|)$ como se indicou, resulta de (2.18) e de (2.19), para $x \neq y$, que $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$ satisfazem

$$\Delta U_{ij}(x-y) + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j(x-y) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} U_{ij}(x-y) = 0 \tag{2.28}$$

Assim, o par $(\mathbf{U}, \mathbf{q})$ é chamado a solução fundamental das equações de Stokes, em $\mathbb{R}^n$.

Das expressões para $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$ (2.20) a (2.27), podemos dizer que, para $|x| \to \infty$, temos

$$\mathbf{U}(x) = O(\log |x|), \quad \text{se } n = 2,$$

$$\mathbf{U}(x) = O(|x|^{-n+2}), \quad \text{se } n > 2,$$

$$D^{\alpha}\mathbf{U}(x) = O(|x|^{-n-|\alpha|+2}), \quad \text{para } |\alpha| \geq 1, \ n \geq 2,$$

$$D^{\alpha}\mathbf{q}(x) = O(|x|^{-n-|\alpha|1}), \quad \text{para } |\alpha| \geq 0, \ n \geq 2.$$

Consideremos o problema de Stokes não homogéneo, em $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \nabla p + f \\ \nabla . \mathbf{v} &= g \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $f, \ g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ são funções conhecidas.

Para o estudo da existência de soluções do problema (2.29), introduzimos os potenciais de volume de Stokes $\mathbf{u}(x)$ e $\pi(x)$ definidos como a seguir se indica:

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y) \cdot \mathbf{F}(y) dy \tag{2.30}$$

$$\pi(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(x-y) \cdot \mathbf{F}(y) dy \tag{2.31}$$

com $\mathbf{F} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Das igualdades

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(x-y) \cdot \mathbf{F}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{U}(z) \cdot \mathbf{F}(x+z) dz$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(x-y) \cdot \mathbf{F}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{q}(z) \cdot \mathbf{F}(x+z) dz$$

resulta que $\mathbf{u}, \ \pi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que $(\mathbf{u}, \ \pi)$ é uma solução do problema (2.29), com $g \equiv 0$ e $f = \mathbf{F}$.

O potencial $\mathbf{u}$ satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Das definições de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$ podemos deduzir a igualdade

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}(x) - \nabla \pi(x) &= \Delta \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \Phi(|x-y|)\mathbf{F}(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 \Phi(|x-y|)\mathbf{F}(y)dy \\ &= (\delta * \mathbf{F})(x) \\ &= \mathbf{F}(x), \end{aligned} \tag{2.32}$$

já que $\Phi\,(|\cdot|)$ é a solução fundamental para a equação biharmónica.

Procuramos uma solução $(\mathbf{v}, p)$ para o problema (2.29), da forma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{h}$ e $p = \pi$, onde $\mathbf{u}$ e π são os potenciais de volume correspondentes a $\mathbf{F} = f - \Delta \mathbf{h}$ e

$$\mathbf{h} = \nabla(\mathcal{E} * g), \tag{2.33}$$

onde $\mathcal{E}$ é a solução fundamental do operador de Laplace.

Uma vez que $\Delta \mathbf{h} = \nabla g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = g, \tag{2.34}$$

temos, de (2.33) e de (2.34), que ($\mathbf{v}$,p) é solução do problema de Stokes não homegéneo (2.29).

Podemos ainda observar que, do comportamento assimptótico de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{q}$, resulta, para $|x| \to \infty$,

$$\mathbf{v}(x) = O(log|x|)\ , \quad \text{se } n = 2,$$

$$\mathbf{v}(x) = O(log|x|^{-n+2})\ , \quad \text{se } n > 2,$$

$$D^\alpha \mathbf{v}(x) = O(log|x|^{-n-|\alpha|+2}), \quad \text{para } |\alpha| \geq 1,\ n \geq 2,$$

$$D^\alpha \pi(x) = O(log|x|^{-n-|\alpha|+1}), \quad \text{para } |\alpha| \geq 0,\ n \geq 2.$$

Capítulo 3

Operadores na análise de Clifford e o problema de Stokes

Neste capítulo analisaremos a solubilidade do problema de Stokes, a partir da sua formulação hipercomplexa. Seguindo [14], introduzimos os operador de Teodorescu e o operador de fronteira, para domínios limitados, e recorrendo à teoria de operadores em Álgebras de Clifford, estudamos a existência e unicidade de soluções do problema de Stokes em espaços de Sobolev.

3.1 Álgebra de Clifford

Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. À algebra gerada por $\mathbb{R}^n$ munida da regra para a multiplicação

$$e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, n$$

chamamos de *Álgebra da Clifford* e denotamos por $Cl_{0,n}$. Ao elemento $e_0 = 1$ chamamos elemento identidade. Os elementos x desta álgebra serão da forma

$$x = \sum_{A \subseteq \{1, \ldots, n\}} x_A e_A.$$

Os elementos $e_A = e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ para $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, com $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, formam uma base para esta álgebra e os coeficientes x_A são reais.

Quando o conjunto A tem exactamente k elementos, então chamamos a e_A um *k-vector* e o subespaço de $Cl_{0,n}$ gerado por estes e_A é denotado por $Cl_{0,n}^k$. Designamos por $[\,\cdot\,]_k$ o operador de projecção de $Cl_{0,n}$ em $Cl_{0,n}^k$.

Observemos que $Cl^1_{0,n}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, e podemos identificar cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ com

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

e de acordo com a regra para a multiplicação, este elemento satisfaz

$$x^2 = -|x|^2 e_0$$

onde $|\cdot|$ representa a norma euclidiana usual.

Definimos o *conjugado* de cada elemento $x \in Cl_{0,n}$ por

$$\overline{x} = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} x_A \overline{e}_A$$

onde $\overline{e}_0 = e_0$, $\overline{e}_j = -e_j$, $j = 1, \ldots, n$, e $\overline{e}_A = \overline{e}_{i_k} \ldots \overline{e}_{i_1}$.

Para cada elemento não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $x\overline{x} = |x|^2 e_0$, donde, cada elemento x tem *inverso* $x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2}$.

No que se segue, identificaremos o espaço $\mathbb{R}^n$ com $Cl^1_{0,n}$.

3.2 O operador de Teodorescu

Considere-se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular.

As funções definidas em Ω com valores em $Cl_{0,n}$ podem ser escritas, para $x \in \Omega$ como

$$f(x) = \sum e_A f_A(x).$$

Assim, a função f é contínua, diferenciável ou integrável se cada uma das suas componentes f_A possui estas propriedades.

Definição 3.2.1 *Definimos o* **operador de Dirac** *como:*

$$Df = \sum_{k=1}^{n} e_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{3.1}$$

Podemos observar que, para este operador, se tem

$$D^2 f = -\Delta f$$

onde Δ é o operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.2 *Uma função suficientemente regular* $f : \Omega \longmapsto Cl_{0,n}$ *diz-se* **monogénica à esquerda** *[monogénica à direita] se* $(Df) = 0$ *em* Ω *[* $(fD) = 0$*].*

Definem-se as normas seguintes:

$$\| u \|_\infty := \| u \|_{L_\infty(\Omega, Cl_{0,n})} = sup\ ess_{x\in\Omega}|u(x)|$$

sendo $|\cdot|$ o operador norma de Clifford[1], onde a norma de Clifford é induzida pelo produto interno (de Clifford)

$$(\lambda, \mu)_0 = \left(\sum_A \lambda_A e_A, \sum_B \lambda_B e_B\right)_0 := 2^n Sc(\lambda\overline{\mu}) = 2^n \sum_A \lambda_A \mu_A.$$

Para $1 \leq q < \infty$ definimos

$$\| u \|_p = \| u \|_{L_p(\Omega, Cl_{0,n})} := \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Adicionalmente,

$$\| u \|_{W_p^1(\Omega, Cl_{0,n})} := \| u \|_{p,1} = \left(\int_\Omega |u|^p + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial}{\partial x_i} u\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotaremos por $|\Omega|$, o volume de Ω.

Definição 3.2.3 Operador de Teodorescu

Seja $f \in C(\Omega, Cl_{0,n})$*. Define-se o operador linear* T *por*

$$(Tf)(x) = -\frac{1}{\sigma_n}\int_\Omega e(x-y)f(y)dy \tag{3.2}$$

onde $e(x-y) = \frac{x-y}{|x-y|^n}$ *e* σ_n *corresponde à área da superfície da esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$*, sendo* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$*. Este operador é designado por Operador de Teodorescu. O núcleo* $G(x) = \frac{1}{\sigma_n}\frac{-x}{|x|^n}$ *é chamado núcleo de Cauchy.*

Começamos por enunciar alguns resultados sobre a existência deste operador e em seguida provaremos a continuidade do operador de Teodorescu em espaços de Sobolev.

A existência do operador T fica garantida para funções $f \in C\left(\overline{\Omega}, Cl_{0,n}\right)$ sendo, nesse caso, válido o lema seguinte.

[1] Para simplificação de escrita, usaremos a mesma notação para a norma euclidiana e a norma de Clifford. O contexto tornará claro a norma a usar.

Lema 3.2.4 *Seja $f \in C\left(\overline{\Omega}, Cl_{0,n}\right)$. Então o integral $(Tf)(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e temos*

$$\| T\ f \|_C \leq \frac{1}{\sigma_n}\ max_{x\in\ \overline{\Omega}} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy\ \ \| f \|_C\ . \tag{3.3}$$

Demonstração: Dado que o integral $\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-1}} dy$ é uniformemente convergente, é contínuo e portanto podemos considerar o máximo em $\overline{\Omega}$, obtendo-se assim a estimativa referida. ■

No caso de espaços $L_1(\Omega, Cl_{0,n})$ prova-se o seguinte:

Lema 3.2.5 *Seja $f \in L_1(\Omega, Cl_{0,n})$. Então, para $x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, o integral*

$$-\frac{1}{\sigma_n} \int_\Omega e(x-y) f(y) dy \tag{3.4}$$

existe e será também denotado por $(Tf)(x)$.

Tem-se ainda que

$$|(Tf)(x)| \leq \frac{1}{\sigma_n} [dist(x,\Omega)]^{1-n} \| f \|_1\ , \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega} \tag{3.5}$$

Demonstração: Pela definição temos que

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \frac{1}{\sigma_n} \left| \int_\Omega e(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_\Omega |e(x-y)||f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sigma_n} [dist(x,\Omega)]^{1-n} \| f \|_1 \end{aligned}$$

■

Do lema anterior podemos observar que, quando $|x| \to \infty$ então $|(T_\Omega f)(x)| \to 0$, e ainda $(T_\Omega f)(x) \in C^\infty\left(\mathbb{R} \backslash \overline{\Omega}, Cl_{0,n}\right)$.

Ainda sobre a existência do operador para funções $f \in L_1(\Omega, Cl_{0,n})$, é válido o teorema seguinte:

Teorema 3.2.6 *Seja $f \in L_1(\Omega, Cl_{0,n})$. Então (Tf) existe quase por toda a parte em $\mathbb{R}^n$ e $(Tf) \in L_q(\Omega', Cl_{0,n})$, para $1 < q < \frac{n}{n-1}$ e para qualquer domínio $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Seja $v \in L_p(\Omega, Cl_{0,n}),\ p > n$. Consideremos $V(x) = \int_\Omega \frac{|v(y)|}{|x-y|^{n-1}}\ dy$. Pela desigualdade de Hölder obtemos a desigualdade

$$V(x) \leq \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{(n-1)q}}\ dy\ \ \| v \|_p\ ,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Uma vez que $(n-1)q < n$, $V(x)$ está definida por um integral uniformemente convergente e portanto é contínua. Assim, temos $V(x)u(x) \in L_1(\Omega, Cl_{0,n})$. Do teorema de Fubini obtemos a igualdade

$$\int_\Omega |u(y)|V(y)\ dy = \int_\Omega |v(y)|U(y)\ dy,$$

onde consideramos $U(x) = \int_\Omega \frac{|u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\ dy$.

Então,podemos concluir que $U(x) \in L_q(\Omega, Cl_{0,n})$, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Daqui resulta que $(Tf)(x) \in L_q(\Omega, Cl_{0,n})$. O resultado sai agora do lema 3.2.5. ■

Para a prova da continuidade do operador T, importa começar por analisar as derivadas $\partial_k\,(Tf)\,(x)$ e a sua continuidade.

Lema 3.2.7 *Seja $f \in C_0(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n})$. Então*

$$\partial_k\,(Tf)\,(x) = -\frac{1}{\sigma_n}\int_\Omega \partial_{k,x} e(x-y)f(y)\ dy\ +\ \overline{e}_k\frac{f(x)}{n} \tag{3.6}$$

Demonstração: Sendo o núcleo do operador T fracamente singular, façamos

$$\Omega_\varepsilon\{y \in \Omega : |x-y \geq \varepsilon|\}$$

e temos assim que

$$Tf(x) = -\frac{1}{\sigma_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} e(x-y)f(y)\ dy.$$

Então, considerando $\cos(r, y_k) = \alpha_k = \frac{y_k - x_k}{|x-y|}$, com $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ o vector normal unitário exterior, no ponto x, resulta

$$\begin{aligned}
\partial_k \int_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{\sigma_n} e(x-y)f(y)\ dy &= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_{k,x} e(x-y)f(y)\ dy \\
&+ \frac{1}{\sigma_n}\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-y_i)e_i}{|x-y|}\cos(r,y_k)f(y)dS_\varepsilon \\
&= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega_\varepsilon} \partial_{k,x} e(x-y)f(y)\ dy \\
&+ \frac{1}{\sigma_n}\int_{S_1} \sum_{i=1}^n (x_i-y_i)e_i\cos(r,y_k)f(x+\varepsilon\Theta)dS_1
\end{aligned}$$

onde $\Theta = \frac{y-x}{|y-x|}$ e tendo em conta que $dS_\varepsilon = \varepsilon^{n-1}dS_1$.

Quando $\varepsilon \to 0$, o segundo integral converge uniformemente para

$$\frac{1}{\sigma_n}\int_{S_1}\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)e_i\cos(r,y_k)dS_1 f(x).$$

Pelo teorema de Stokes, B.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_n}\int_{S_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\cos(r,y_k)dS_1 &= \frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{n}e_i\int_{r<1}\frac{\partial(x_i-y_i)}{\partial y_k}dy\\
&= \frac{\overline{e}_k}{\sigma_n}\int_{S_1}\int_0^1 r^{n-1}dr\ dS_1\\
&= \frac{\overline{e}_k}{n}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
-\partial_{k,x}e(x-y) &= \partial_{k,x}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-y_i)\overline{e}_i}{|x-y|^n}\\
&= \left(\sum_{i\neq k}-n\frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)\overline{e}_i}{|x-y|^{n+2}}\right)+\frac{\overline{e}_k}{|x-y|^n}-\frac{n(x_k-y_k)^2\overline{e}_k}{|x-y|^{n+2}}\\
&= \frac{1}{|x-y|^n}\left(-n\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)\overline{e}_i}{|x-y|^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-y_j)^2}{|x-y|^2}\overline{e}_k\right). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_{S_1}\left(-n\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_k-y_k)(x_i-y_i)\overline{e}_i}{|x-y|^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-y_j)^2}{|x-y|^2}\overline{e}_k\right)dS_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S_1}\left(-n\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-y_i)}{|x-y|}\overline{e}_i\cos(r,y_k)+\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}\overline{e}_k\cos(r,y_j)\right)dS_1\\
&= \left(-n\frac{\sigma_n}{n}\overline{e}_k+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_n}{n}\overline{e}_k\right)=0
\end{aligned}$$

temos que, quando $\varepsilon\to 0$, o integral $\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_{k,x}e(x-y)f(y)\ dy$ converge uniformemente em, x, para o integral singular $\int_{\Omega}\partial_{k,x}e(x-y)f(y)\ dy$.

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\partial_k(Tf)(x) &= \partial_k\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}-\frac{1}{\sigma_n}e(x-y)f(y)\ dy\right)\\
&= -\frac{1}{\sigma_n}\lim_{\varepsilon\to 0}\partial_k\int_{\Omega_\varepsilon}e(x-y)f(y)\ dy\\
&= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega}\partial_{k,x}e(x-y)f(y)\ dy+\overline{e}_k\frac{f(x)}{n}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.8 *O operador*

$$\partial_k T : \ L_p(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n}) \rightarrow \ L_p(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n}) \tag{3.8}$$

é uma aplicação contínua e

$$\| \partial_k T \|_{L_p(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n})} \leq \left(c\sigma_n^{-\frac{1}{p}} + \frac{1}{n} \right) \| f \|_p \tag{3.9}$$

Demonstração: Pelo lema anterior temos que

$$\partial_k \left(T_\Omega f\right)(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_\Omega \partial_{k,x} e(x-y) f(y) \ dy \ + \ \overline{e}_k \frac{f(x)}{n}$$

Pelo teorema de Calderón-Zygmund ([21]), temos a estimativa seguinte:

$$\| \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} e(x-y) f(y) dy \|_p \leq c \left(\int_{S_1} \left(\frac{1}{\sigma_n} \frac{(x-y)}{|x-y|} \right)^q \ dS_1 \right)^{\frac{1}{q}} \| f \|_p \tag{3.10}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left(\frac{1}{\sigma_n} \frac{(x-y)}{|x-y|} \right)^q \ dS_1 \quad &= \quad \frac{1}{\sigma_n} \left(\int_{S_1} \ dS_1 \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \quad \sigma_n^{\frac{1}{q}-1} \\ &= \quad \sigma_n^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Sendo $C_0^1(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n})$ denso em $L_p(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n})$, podemos extender a desigualdade anterior a $L_p(\mathbb{R}^n, Cl_{0,n})$.

Por outro lado,

$$\| \overline{e}_k \frac{f}{n} \|_p \leq \frac{1}{n} \| f \|_p$$

Então, conjugando todas as estimativas, temos

$$\| \partial_k T f \|_p \leq \left(c\sigma_n^{-\frac{1}{p}} + \frac{1}{n} \right) \| f \|_p \tag{3.11}$$

■

Tendo em conta os resultados anteriores, podemos agora provar a continuidade do operador de Teodorescu em domínios limitados.

Teorema 3.2.9 *Seja* Ω *um domínio limitado. O operador*

$$T_\Omega : L_p(\Omega, Cl_{0,n}) \rightarrow \ W_p^k(\Omega, Cl_{0,n})$$

é contínuo.

Demonstração: Para provar este resultado começamos por estender a função f a $\mathbb{R}^n$ continuamente pela função:

$$f = \begin{cases} f & \text{em } \Omega, \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$$

Começamos por demonstrar o caso $k = 1$. Então temos

$$\begin{aligned} \| Tf \|_{p,1} &= \left(\| Tf \|_p + \sum_{j=1}^{n} \| \partial_j Tf \|_p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| Tf \|_p + \sum_{j=1}^{n} \| \partial_j Tf \|_p \end{aligned}$$

e pelo teorema 3.2.8, podemos dizer que

$$\begin{aligned} \| Tf \|_{p,1} &\leq diam(\Omega) \| f \|_p + \sum_{k=1}^{n} \left(c\ \sigma_n^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} \right) \| f \|_p \\ &\leq diam(\Omega) \| f \|_p + \left(n\ c\ \sigma_n^{-\frac{1}{p}+1} \right) \| f \|_p \\ &\leq \left(diam(\Omega) + n\ c\ \sigma_n^{-\frac{1}{p}} + 1 \right) \| f \|_p \end{aligned}$$

o que prova a continuidade do operador no espaço de Sobolev $W_p^1(\Omega, Cl_{0,n})$. O caso de $k > 1$ é facilmente generalizável, tendo em conta que

$$\| Tf \|_{p,k} \leq \| Tf \|_p + \sum_{|\alpha| \leq k} \| \partial^\alpha Tf \|_p$$

e o teorema 3.2.8. $\blacksquare$

Teorema 3.2.10 *Para $1 < p < \infty$ e $k = 0, 1, \ldots,$ tem-se que*

$$T : \ W_p^k(\Omega, Cl_{0,n}) \ \mapsto \ W_p^{k+1}(\Omega, Cl_{0,n}).$$

Demonstração: De [21], cap. 3, temos que se

$$f \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n}) \text{ então } \partial_i Tf \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n})$$

donde resulta que $Tf \in W_p^{k+1}(\Omega, Cl_{0,n})$. $\blacksquare$

Apresentamos agora uma propriedade do operador de Teodorescu, que será importante para o que estudamos a seguir.

Teorema 3.2.11 *O operador T é um inverso à direita do operador de Dirac, isto é*

$$D\,(Tf) = f \tag{3.12}$$

Demonstração: Do Lema 3.2.7, temos que

$$\partial_k\,(Tf)\,(x) = -\frac{1}{\sigma_n}\int_\Omega \partial_{k,x}e(x-y)f(y)\;dy \;+\; \overline{e}_k\frac{f(x)}{n}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} -\partial_{k,x}e(x-y) &= \partial_{k,x}\left[\frac{\sum_{i=1}^n \overline{e_i}(x_i-y_i)}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}\right)^n}\right] \\ &= \frac{\overline{e_k} - n(x_k-y_k)\frac{\overline{x-y}}{|x-y|^2}}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

Se multiplicarmos por e_k e somarmos sobre todos os valores e $k=1,\ldots,n$ tendo em conta que $e_k\overline{e}_k = 1,\;\; k=1,\ldots,n$, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e_k\partial_{k,x}e(x-y) &= \frac{-\sum_{k=1}^n e_k\overline{e}_k + n\sum_{k=1}^n e_k(x_k-y_k)\frac{\overline{x-y}}{|x-y|^2}}{|x-y|^n} \\ &= \frac{-n + n(x-y)\frac{\overline{x-y}}{|x-y|^2}}{|x-y|^n} \\ &= \frac{-n+n}{|x-y|^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que,

$$\begin{aligned} D(Tf)(x) &= 0 + \sum_{i=1}^n e_k\overline{e}_k\frac{f(x)}{n} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

■

Note-se que o operador T é um inverso de D, à direita, a menos de uma função monogénica, isto é: dada uma função g tal que $Dg = 0$, então $D(Tf+g) = f$.

Definição 3.2.12 *Seja* $u \in C^1(\Omega, Cl_{0,n}) \cap C(\overline{\Omega}, Cl_{0,n})$. *Para cada* $x \notin \Gamma$ *definimos ainda o* **operador integral de fronteira** F_Γ:

$$(F_\Gamma f)(x) = \int_\Gamma e(x-y)\alpha(y)f(y)\ d\Gamma_y \tag{3.14}$$

onde $\alpha(y)$ *é o vector normal unitário exterior a* Γ *no ponto* y. *Este operador é também designado de operador de Cauchy-Bitsadze.*

Teorema 3.2.13 *Para* $1 < p < \infty$ *e* $k = 1, 2, \ldots$ *tem-se*

$$F_\Gamma : W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma) \ \mapsto\ W_p^k(\Omega, Cl_{0,n}) \cap ker(D(\Omega, Cl_{0,n})).$$

Demonstração: Seja $u \in W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Então existe uma função $v \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n})$ com $tr\ v = u$ e pela fórmula de Borel-Pompeiu temos, $F_\Gamma u = v - TDv$. Das propriedades do operador T, resulta que $v - TDv \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n})$.

Por outro lado, $D(F_\Gamma u) = D(v - TDv) = 0$. donde, para $u \in W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ temos que $F_\Gamma u \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n}) \cap ker(D(\Omega, Cl_{0,n}))$ ∎

Teorema 3.2.14 Fórmula de Borel-Pompeiu *Seja* $f \in W_p^k(\Omega)$ $(1 < p < \infty,\ k \in \mathbb{N})$. *Então é válida a Fórmula de Borel-Pompeiu:*

$$(F_\Gamma f)(x) + (TDf)(x) = f(x) \tag{3.15}$$

Demonstração: Para a demonstração do teorema, seguimos as mesmas ideias da prova do Lema 3.2.7.

Por definição

$$\begin{aligned}
TDf(x) &= -\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega} e(x-y)\sum_{i=1}^{n} e_i\frac{\partial}{\partial y_i}f(y)d\Omega_y \\
&= lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega_\varepsilon} e(x-y)e_i\frac{\partial}{\partial y_i}f(y)d\Omega_y\right. \\
&+ \left.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_n}\int_{S_\varepsilon}\frac{(x_i-y_i)e_i}{|x-y|^n}\cos(r,y_i)e_if(y)dS_\varepsilon\right) \\
&= lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\sigma_n}\int_{\Gamma} e(x-y)\sum_{i=1}^{n}\cos(r,y_i)e_if(y)d\Gamma_y\right. \\
&+ \frac{1}{\sigma_n}\int_{\Omega_\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(e(x-y)\right)e_if(y)d\Omega_\varepsilon \\
&+ \left.\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{S_\varepsilon}\frac{(x_i-y_i)e_i}{|x-y|^n}\cos(r,y_i)e_if(y)dS_\varepsilon\right) \\
&= -F_\Gamma f(x)+0+f(x)
\end{aligned}$$

■

Pelos dois teoremas anteriores podemos dizer que

$$DF_\Gamma f=0 \qquad \text{e} \qquad F_\Gamma Tf=0 \tag{3.16}$$

Tendo em conta o traço do operador F_Γ podemos definir duas **projecções**, P_Γ e Q_Γ:

$$\left(P_\Gamma f\right)(x)=\lim_{y\to x}\left(F_\Gamma f\right)(y) \tag{3.17}$$

para $y\in\Omega,\ x\in\Gamma$

$$\left(Q_\Gamma f\right)(x)=\lim_{y\to x}\left(-F_\Gamma f\right)(y) \tag{3.18}$$

onde $y\in\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega},\quad x\in\Gamma$

O operador P_Γ é a projecção no espaço das funções com valores na álgebra de Clifford que têm uma extensão monogénica em Ω e Q_Γ é a projecção no espaço das funções com valores na álgebra de Clifford que têm uma extensão monogénica no domínio $\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega}$.

Para estes projectores verifica-se que, para qualquer função f,

$$Q_\Gamma P_\Gamma f=P_\Gamma Q_\Gamma f=0$$

3.3 Decomposição ortogonal do espaço L_2

Em $L_2(\Omega, Cl_{0,n})$ definimos o *produto interno*

$$(u,v)_{L_2}(\Omega) = \int_\Omega \overline{u(x)}\ v(x)\ dx, \tag{3.19}$$

para $u, v \in L_2(\Omega, Cl_{0,n})$.

Escreveremos apenas $(u,v)_2$ em vez de $(u,v)_{L_2}$. Note-se que o produto interno anterior tem valores em $Cl_{0,n}$.

No que se segue, pretendemos identificar o complemento ortogonal das funções monogénicas em L_2, em relação ao produto interno (3.19).

Teorema 3.3.1 *O espaço de Hilbert $L_2(\Omega, Cl_{0,n})$ admite a decomposição ortogonal*

$$L_2(\Omega, Cl_{0,n}) = kerD \cap L_2(\Omega, Cl_{0,n}) \oplus D\left(\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega, Cl_{0,n})\right) \tag{3.20}$$

em relação ao produto interno (3.19).

Demonstração: Sejam $X_1 = kerD \cap L_2(\Omega, Cl_{0,n})$ e $X_2 = L_2(\Omega, Cl_{0,n}) \ominus X_1$. Note-se que X_1 e X_2 são subespaços de $L_2(\Omega, Cl_{0,n})$.

Para $u \in X_2$ temos que $Tu \in W_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$. Assim, existe $v \in W_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$ tal que $u = Dv$. Queremos mostrar que $v \in \overset{\circ}{W_2^1}(\Omega, Cl_{0,n})$.

Consideremos $\phi \in X_1$. Então $\int_\Omega \overline{Dv}\ \phi\ dy = 0$, e em particular, para $\phi_k(x) = \frac{1}{\sigma_n}\frac{x-x_k}{|x-x_k|^n}$, com $k \in \mathbb{N},\ x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ temos

$$\int_\Omega \overline{Dv}\ g_k d\Omega = 0 \tag{3.21}$$

uma vez que cada $g_k \in ker(D) \cap L_2(\Omega, Cl_{0,n})$. Assuma-se que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Da igualdade (ver [14])

$$\int_\Omega [(uD)v + u(Dv)]\, dy = \int_\Gamma u(y)\alpha(y)v(y)\ d\Gamma_y$$

resulta que, para qualquer x_k,

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \overline{Dv}(y)\phi(y)dy &= \overline{\int_\Omega \overline{\phi_k}(Dv)(y)dy} \\ &= -\overline{\int_\Omega (\overline{\phi_k}D)(y)v(y)dy} + \overline{\int_\Gamma \overline{\phi_k}(y)\alpha(y)v(y)\ d\Gamma_y} \\ &= \overline{\int_\Omega (\overline{\phi_k}D)(y)v(y)dy} - \overline{\int_\Gamma \overline{\phi_k}(y)\alpha(y)v(y)\ d\Gamma_y} \\ &= -\overline{(F_\Gamma v)(x_k)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sendo $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, temos que $(F_\Gamma v)(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, e $v \in imP_\Gamma \cap W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma, Cl_{0,n})$. Daqui resulta que existe uma função $h \in W_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$, com $Dh = 0$ e $tr\ h = v$, onde tr denota o operador de restrição à fronteira Γ (o operador traço).

Consideremos a diferença $w = v - h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$. Então $Dw \in D\left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, Cl_{0,n})\right)$. Como $u = Dv = Dw$, o resultado fica provado. ■

A decomposição anterior define duas projecções ortogonais

$$\mathbf{P}: \quad L_2(\Omega) \mapsto kerD(\Omega) \cap L_2(\Omega)$$

$$\mathbf{Q}: \quad L_2(\Omega) \mapsto D\left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$$

Verifica-se que $\mathbf{Q} = I - \mathbf{P}$.

3.4 Aplicação ao problema de Stokes

Nesta secção vamos estudar o problema de Stokes na forma hipercomplexa. Tendo em conta os operadores atrás definidos e as suas propriedades, investigaremos a existência de soluções para este problema.

Assim, consideremos o problema de Stokes

$$\begin{aligned} -\triangle v + \frac{1}{\mu}\nabla p &= f, \text{ em } \Omega, \\ \nabla \cdot v &= 0, \text{ em } \Omega \\ v &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $v = (v_1, \ldots, v_n)$ é uma função vectorial, p é uma função escalar, f é a função das forças externas e μ representa a viscosidade do fluído.

Na forma hipercomplexa, o problema é dado por:

$$\begin{aligned} DDv + \frac{1}{\mu}Dp &= f, \text{ em } \Omega, \\ ScDv &= 0, \text{ em } \Omega \\ v &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sem perda de generalidade, considere-se, no que se segue, $\mu = 1$.

No que se segue, supomos que $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ e adicionamos ao problema anterior as condições $-\Delta v_A = 0$ e $v_A = 0$ em $\partial\Omega$, para $A \notin \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$.

O teorema seguinte fornece uma representação para as soluções $v \in W_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$ deste problema.

Teorema 3.4.1 *Sejam $f \in L_2(\Omega, Cl_{0,n})$ e $p \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R})$. Toda a solução $v \in W_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$ do problema (3.24) pode representar-se da forma seguinte:*

$$v = T\boldsymbol{Q}Tf - T\boldsymbol{Q}p. \tag{3.25}$$

Além disso, a condição $ScDv = 0$ pode ser escrita como

$$Sc(\boldsymbol{Q}Tf - \boldsymbol{Q}p) = 0 \tag{3.26}$$

Demonstração: É fácil ver que da validade de (3.25) resulta a expressão (3.26). Com efeito, aplicando o operador D em (3.25) obtemos $Dv = \mathbf{Q}Tf - \mathbf{Q}p$, donde

$$\begin{aligned} 0 &= Sc\ Dv \\ &= Sc(\mathbf{Q}Tf - \mathbf{Q}p) \end{aligned}$$

Provemos agora a validade de (3.25). Comecemos por aplicar o operador T na primeira condição. Então temos

$$TDDv + TDp = Tf.$$

Pela fórmula de Borel-Pompeiu (teorema 3.2.14), obtemos

$$Dv - F_\Gamma Dv + p - F_\Gamma Dp = Tf.$$

Aplicando agora o operador $\mathbf{Q}$ temos

$$\mathbf{Q}\left[(I - F_\Gamma)Dv + (I - F_\Gamma)p\right] = \mathbf{Q}Tf.$$

De $\mathbf{Q}(I - F_\Gamma) = \mathbf{Q}$, resulta

$$\mathbf{Q}Dv + \mathbf{Q}p = \mathbf{Q}Tf$$

Aplicando novamente o operador T obtemos a expressão:

$$T\mathbf{Q}Dv + T\mathbf{Q}p = T\mathbf{Q}Tf$$

Como $Dv \in im\mathbf{Q}$ então $T\mathbf{Q}Dv = TDv = v$, donde deriva a condição (3.25). ∎

Quando à unicidade da solução (v, p), pode enunciar-se o seguinte teorema:

Teorema 3.4.2 *O Problema de Stokes (3.24) tem uma única solução (v, p) (sendo p único a menos de uma constante) que é representada por (3.25)e satisfaz a desigualdade*

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel v \parallel_{1,2} + \parallel \boldsymbol{Q}p \parallel_2 \leq 2 \parallel Tf \parallel_2 \tag{3.27}$$

onde λ_1 é o primeiro valor próprio do problema de Dirichlet para o operador de Laplace $\{-\Delta u = \lambda u, \quad tru = 0 \ em \ \Gamma\}$.

Para a prova deste resultado necessitamos do espaço $M_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$ - o espaço das funções com valores em $Cl_{0,n}$ com derivadas generalizadas pertencentes ao espaço $L_2(\Omega, Cl_{0,n})$. Pode mostrar-se ([13]) que este espaço admite a decomposição ortogonal

$$\mathbf{Q}M_2^1(\Omega, Cl_{0,n}) = ker\ divD(\overset{\circ}{W_2^1}(\Omega, Cl_{0,n})) \oplus \mathbf{Q}L_2(\Omega, \mathbb{R}),$$

em relação ao produto interno

$$(u, v)_{Sc} = Sc \int_\Omega \overline{u} v d\Omega.$$

Demonstração: Consideremos $z \in \mathbf{Q}M_2^1(\Omega, Cl_{0,n})$. Então $z = \mathbf{Q}Tf$. Por (3.25), existem uma função com valores em $Cl_{0,n}$, $v \in \overset{\circ}{W_2^1}(\Omega, Cl_{0,n}) \cap ker\ div$ e uma função $p \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$, escalar, tais que

$$Dv + \mathbf{Q}p = \mathbf{Q}Tf. \tag{3.28}$$

Aplicando a fórmula de Borel-Pompeiu obtemos

$$v + T\mathbf{Q}p = T\mathbf{Q}Tf. \tag{3.29}$$

o que prova a unicidade de v.

Como $Dv \in im\mathbf{Q}$ e $Sc(Dv) = 0$ temos que $(Dv, \mathbf{Q}p)_{Sc} = (Dv, p)_{Sc} - (Dv, \mathbf{P}p)_{Sc} = 0$, isto é, $Dv \perp \mathbf{Q}p$. Assim, por (3.28), temos

$$\begin{aligned} \parallel \mathbf{Q}Tf \parallel_2^2 &= \parallel Dv + \mathbf{Q}p \parallel_2^2 \\ &= \parallel Dv \parallel_2^2 + \parallel \mathbf{Q}p \parallel_2^2 \end{aligned}$$

Sendo $\parallel \mathbf{Q} \parallel_2 = 1$, resulta que

$$\parallel Dv \parallel_2 + \parallel \mathbf{Q}p \parallel_2 \leq 2 \parallel Tf \parallel_2 .$$

A estimativa resulta agora da desigualdade $\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}} \parallel v \parallel_{2,1} \leq \parallel Dv \parallel_2$, (ver [12]).

Se considerarmos agora p_1 e p_2, duas soluções, obtemos, de (3.26), que $\mathbf{Q}(p_1 - p_2) = 0$ donde, pela decomposição (3.20) resulta que $p_1 - p_2 \in \ ker\ D$ e portanto $p_1 - p_2 \in \mathbb{R}$. ■

No que vimos anteriormente, apenas estudámos o problema de Stokes em espaços $W_2^1(\Omega)$. A seguir, estudamos este problema no caso mais geral dos espaços $W_p^k(\Omega)$, com $k \geq 0$, e $1 < p < \infty$.

Teorema 3.4.3 *Seja* $f \in L_2(\Omega, Cl_{0,n}) \cap W_p^{k,loc}(\Omega, Cl_{0,n}),\ k \in \mathbb{N},\ 1 < p < \infty.$

Então tem-se, para a solução (v,p) *do problema de Stokes, que* $v \in W_p^{k+2,loc}(\Omega, Cl_{0,n})$ *e* $p \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, \mathbb{R})$.

Demonstração: Como $Vec\, p = 0$ temos que $Vec\, \mathbf{P}p = -Vec\, \mathbf{Q}p \in ker\triangle(\Omega)$ e portanto, $Vec\, \mathbf{Q}p \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega'),\ \Omega' \subset \Omega$.

De (3.26) temos $Sc\ \mathbf{Q}p = Sc\ \mathbf{Q}Tf$ e daqui resulta que $Sc\ \mathbf{Q}p \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, \mathbb{R})$. Assim teremos $\mathbf{Q}p \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, \mathbb{R})$.

Tendo em conta a estimativa (3.27), temos $Dv = \mathbf{Q}Tf - \mathbf{Q}p \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, Cl_{0,n})$ e finalmente, $TDp \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, Cl_{0,n})$.

Então $p = TDp + F_\Gamma p \in W_p^{k+1,loc}(\Omega, \mathbb{R})$. ■

Antes de apresentar resultados de regularidade mais global, necessitamos de um resultado sobre o operador de fronteira $tr\ TF_\Gamma$, cuja demonstração se encontra em [14].

Lema 3.4.4 *Seja* $1 < p < \infty$. *Então o operador*

$$tr\ TF_\Gamma :\ W_p^{k-\frac{1}{p}}(\Gamma) \cap im\ \boldsymbol{P}_\Gamma \cap kerSc \longrightarrow\ W_p^{k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \cap im \boldsymbol{Q}_\Gamma \cap ker\ tr\ div$$

é um isomorfismo.

Podemos agora enunciar o resultado sobre regularidade global. Neste resultado apresentamos também as representações para as soluções, (v,p), do problema de Stokes.

Teorema 3.4.5 *Seja* $f \in W_p^k(\Omega, Cl_{0,n}),\ k \geq 0,\ 1 < p < \infty$. *Então a única solução do problema de Stokes (3.24) pode ser representada por*

$$v = T\ Vec\ Tf - T\ VecF_\Gamma(trT\ VecF_\Gamma)^{-1}trT\ Vec\ Tf \tag{3.30}$$

$$p = Sc\ Tf - Sc\ (trT\ VecF_\Gamma)^{-1}trT\ VecT\ f \tag{3.31}$$

Em relação à regularidade global temos $v \in W_p^{k+2}(\Omega, Cl_{0,n})$ *e* $p \in W_p^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$.

Demonstração: Consideremos o operador $trT\,VecF_{\Gamma}$ e mostremos que está bem definido e é invertível. Temos que $trT\,VecF_{\Gamma} \in im\ \mathbf{Q}_{\Gamma}$. Adicionalmente, temos que

$$div\ T\ Vec\ Tf = -Sc\ DT\ Vec\ Tf = -Sc\ Vec\ Tf = 0.$$

Daqui resulta que $tr\,(T\ Vec\ Tf) \in ker\,(tr\ div)\,.$

Assuma-se que se tem $Sc\ z = 0$. Se $tr\ TF_{\Gamma}z \in ker\,(tr\ div)\,$, então $tr\ ScF_{\Gamma}z = 0$.

Uma vez que $Sc\ F_{\Gamma}z \in ker\Delta$ podemos concluir que $Sc\ F_{\Gamma}z = 0$ em Ω. Assim, obtemos que o operador $tr\ TF_{\Gamma}z$ pode ser escrito como $tr\ T\ Vec\ F_{\Gamma}$, donde, pelo lema anterior, podemos dizer que as representações indicadas fazem sentido.

Substituindo as expressões (3.30) e (3.31) no problema (3.24) podemos verificar que estas representações descrevem a solução do problema considerado.

A prova da regularidade resulta imediatamente das propriedades dos operadores envolvidos. ■

Capítulo 4

Caso de domínios ilimitados

No caso de um domínio ilimitado, a aplicação do operador T definido na secção anterior apresenta alguns problemas, uma vez que este operador não é limitado quando actua em funções definidas em domínios com esta característica, por exemplo $L_2(\Omega)$. Para contornar esta situação iremos definir o operador $\widetilde{T}$ e consequentemente o operador de fronteira $\widetilde{F}_\Gamma$, com base em [5]. A definição dos operadores $\widetilde{T}$ e $\widetilde{F}_\Gamma$, permite um tratamento do problema de Stokes muito semelhante ao que foi realizado no capítulo anterior.

Posteriormente, apresentaremos a formulação hipercomplexa para o problema de Stokes em domínios ilimitados e estudaremos a existência de soluções em no espaço de Sobolev W_q^1.

4.1 Os operadores em domínios ilimitados

Seja Ω um domínio ilimitado. Consideremos um ponto z fixo, $z \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, supondo que $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ contém um conjunto aberto não-vazio. Então definimos o operador $\widetilde{T}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{T} f(y) = \int_\Omega K_z(x,y) f(x) d\Omega_x \tag{4.1}$$

onde $K_z(x,y) = G(x-y) - G(x-z)$ e G é definido por

$$G(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \frac{x}{|x|^n}, \tag{4.2}$$

e σ_n corresponde à área da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Observemos que esta função é monogénica à esquerda e à direita, isto é, $DG = 0 = GD$. Além disso, G é uma solução fundamental do operador D.

Assim, tal como o que foi discutido anteriormente em relação ao operador T, também o operador $\widetilde{T}$ é um inverso do operador de Cauchy generalizado. Tem-se então que

$$D\widetilde{T}f = f.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} D\widetilde{T}f(y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_\Omega K_z(x,y)f(x)d\Omega_x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Omega \left(G(x-y)-G(x-z)\right)f(x)d\Omega_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Omega G(x-y)d\Omega_x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Omega G(x-z)f(x)d\Omega_x \end{aligned}$$

Por procedimentos análogos aos da secção anterior, podemos dizer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Omega G(x-y)d\Omega_x = DTf(y) = f(y).$$

Por outro lado, como $z \notin \Omega$ e $DG = 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\int_\Omega G(x-z)d\Omega_x = 0$$

o que prova a afirmação.

Teorema 4.1.1 *O operador*

$$\widetilde{T}\ : W_q^k(\Omega) \to W_q^{k+1}(\Omega), \quad 1 < q < \infty,\ k = 0, 1, \ldots$$

é uma aplicação contínua.

Demonstração: Por definição temos

$$\widetilde{T}f(y) = Tf(y) - Tf(z)$$

e pelos resultados do capítulo anterior, podemos concluir que o operador é contínuo. ∎

Teorema 4.1.2 *O operador*

$$\widetilde{T}:\ W_q^{-1}(\Omega) \to L_q(\Omega)\ ,\ 1 < q < \infty$$

é limitado.

Demonstração: Para cada $f \in W_q^{-1}(\Omega)$, temos a representação $f = \sum_{k=1}^n \partial_k f_k$, com $f_1,\ f_k \in L_q(\Omega),\ k = 1, \ldots, n$. Escolhendo $v_1,\ v_k \in C_0^\infty,\ k = 1, \ldots, n$, temos $v = \sum_{k=1}^n \partial_k v_k$ e podemos calcular $\widetilde{T}v$.

$$\begin{aligned}\widetilde{T}v(y) &= \int_\Omega K_z(x,y)\ v(x) d\Omega_x \\ &= \int_\Omega K_z(x,y) \left(\sum_{k=1}^n \partial_k v_k(x) \right) d\Omega_x \\ &= \sum_{k=1}^n \int_\Omega \partial_k K_z(x,y)\ v_k(x)\ d\Omega_x\end{aligned}$$

Sendo os integrais $\int_\Omega \partial_k K_z(x,y) v_k(x) d\Omega_x$ integrais fortemente singulares do tipo de Calderon-Zygmund, então é válido o seguinte:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}v\|_{L_q(\Omega)} &\leq \sum_{k=1}^n \| \int_\Omega \partial_k K_z(x,y)\ v_k(x)\ d\Omega_x \|_{L_q(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n c_k \|v_k\|_{L_q(\Omega)}\end{aligned}$$

onde $c_k,\ k = 1, \ldots, n$ são constantes. Como C_0^∞ é denso em $L_q(\Omega)$, temos, para $f \in W_q^{-1}(\Omega)$, e para uma sua representação arbitrária

$$\|\widetilde{T}f\|_{L_q(\Omega)} \leq c' \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_q(\Omega)} \right)$$

donde resulta

$$\|\widetilde{T}f\|_{L_q(\Omega)} \leq c \|f\|_{W_q^{-1}(\Omega)}$$

■

O **operador integral de fronteira**, $\widetilde{F}_\Gamma$ é definido, analogamente a F_Γ que foi definido na secção anterior.

$$\widetilde{F}_\Gamma f(y) = \int_\Gamma K_z(x,y) \alpha(x) f(x) d\Gamma_x$$

onde $\alpha(x)$ é o vector normal unitário exterior a Γ no ponto x.

À semelhança do que vimos no capítulo anterior, para domínios limitados, definimos agora a fórmula de Borel-Pompeiu em domínios ilimitados como consta no teorema que se segue.

Teorema 4.1.3 ***Fórmula de Borel-Pompeiu***

Se $f \in W_q^1(\Omega),\ 1 < q < \infty$ *então temos*

$$\widetilde{F}_\Gamma f = f - \widetilde{T} D f. \tag{4.3}$$

Demonstração: A prova baseia-se nos resultados já provados no capítulo anterior e tendo em conta que $z \notin \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_\Gamma f(y) &= \int_\Gamma G(x-y)\alpha(x) f(x) d\Gamma_x - \int_\Gamma G(x-z)\alpha(x) f(x) d\Gamma_x \\ &= f(y) - TDf(y) - 0 + T_z Df(y) \\ &= f(y) - \widetilde{T} Df(y) \end{aligned}$$

onde T_z denota o operador de Teodorescu associado ao núcleo $G(x-z)$. ■

Á semelhança do caso de domínios limitados, é válido o seguinte teorema:

Teorema 4.1.4 *Para* $k \in \mathbb{N}$, *o operador*

$$\widetilde{F}_\Gamma :\ W_q^{k-1/q}(\Gamma) \mapsto W_q^k(\Omega) \cap kerD$$

é um operador contínuo.

No capítulo anterior apresentámos uma decomposição do espaço $L_2(\Omega)$, mas no caso geral dos espaços $L_q(\Omega)$, não podemos seguir as mesmas ideias, pois estes espaços são apenas espaços de Banach. Recorrendo à solução do Problema de Dirichlet da equação de Poisson

$$-\triangle u = f,\ em\ \Omega$$

$$u = 0,\ em\ \Gamma$$

para $f \in W_q^{-1}(\Omega)$, prova-se a decomposição do espaço $L_q(\Omega),\ 1 < q < \infty$ que se indica no teorema a seguir ([5]).

Teorema 4.1.5 *O espaço* $L_q(\Omega),\ 1 < q < \infty$ *admite a seguinte decomposição*

$$L_q(\Omega) = kerD(\Omega) \cap L_q(\Omega) \oplus D(\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)). \tag{4.4}$$

A partir desta decomposição obtemos as projecções

$$\mathbf{P} \; : \; L_q(\Omega) \rightarrow \; kerD \cap L_q(\Omega)$$

$$\mathbf{Q} \; : \; L_q(\Omega) \rightarrow \; D(\overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega))$$

A projecção $\mathbf{P}$ admite a seguinte representação

$$\mathbf{P}f = \widetilde{F}_\Gamma (tr\widetilde{T}\widetilde{F}_\Gamma)^{-1} tr\widetilde{T}f$$

para funções $f \in W_q^k(\Omega), \; k \in \mathbb{N}, \; 1 < q < \infty$.

Analogamente ao caso dos domínios limitados, temos que a projecção $\mathbf{P}$ admite a representação

$$\mathbf{P}f = \widetilde{F}_\Gamma (tr\; \widetilde{T}\widetilde{F}_\Gamma)^{-1} tr\widetilde{T}f,$$

para $f \in W_q^k(\Omega), \; k \in \mathbb{N}, \; 1 < q < \infty$.

4.2 Problema de Stokes

À semelhança do que foi discutido no capítulo anterior, podemos escrever a forma hipercomplexa do problema de Stokes, num domínio ilimitado Ω, como a seguir se apresenta

$$\begin{aligned} DDv + \frac{1}{\mu} Dp &= \frac{\rho}{\mu} f, \text{ em } \Omega, \\ ScDv &= 0, \text{ em } \Omega \\ v &= 0, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.5}$$

ao qual se adicionam as condições $\Delta\widetilde{v} = 0$, e $\widetilde{v}\,|_{\partial\Omega} = 0$, para $\widetilde{v} = v - \sum_{k=1}^n e_k v_k$.

As soluções $v \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega, Cl_{0,n})$ e $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R})$ deste problema admitem a representação que a seguir se enuncia.

Teorema 4.2.1 *Sejam* $f \in W_q^{-1}(\Omega, Cl_{0,n})$, $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R}), \; 1 < q < \infty$. *Então, cada solução do problema (4.5) admite a seguinte representação*

$$v = \frac{\rho}{\mu} \widetilde{T} \boldsymbol{Q} \widetilde{T} f - \frac{1}{\mu} \widetilde{T} \boldsymbol{Q} p.$$

Demonstração: Com o objectivo de obter um representação de v em $\overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, comecemos por considerar $p_n \in W_q^1(\Omega)$ tal que $p_n \to p$ em $L_q(\Omega)$. Temos então, pela fórmula de Borel-Pompeiu,

$$\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}(Dp_n) = \widetilde{T}\mathbf{Q}(p_n - \widetilde{F}_\Gamma) = \widetilde{T}\mathbf{Q}p_n$$

Porque $W_q^1(\Omega)$ é denso em $L_q(\Omega)$, temos que

$$\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}Dp = \widetilde{T}\mathbf{Q}p.$$

Assim, para $v \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega, Cl_{0,n})$ e $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R})$ resulta que

$$\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}\left(\frac{\rho}{\mu}\right) = \widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}(DDv + \frac{1}{\mu}Dp) = v + \frac{1}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}p$$

ou seja,

$$v = \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}f - \frac{1}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}p.$$

■

Do teorema anterior resulta uma formulação equivalente para o problema (4.5) dada a seguir:

$$v + \frac{1}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}f \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{\mu}Sc\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\mu}Sc\mathbf{Q}\widetilde{T}f \tag{4.7}$$

Da aplicação de D na equação (4.6), resulta

$$Dv + \frac{1}{\mu}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\mu}\mathbf{Q}\widetilde{T}f. \tag{4.8}$$

A expressão anterior leva-nos a considerar uma possível decomposição das funções $\mathbf{Q}\widetilde{T}f$ em duas funções do tipo indicado.

Para verificar a validade desta decomposição, suponham-se $v \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega, Cl_{0,n}) \cap ker\ div$, $f \in W_q^{-1}(\Omega, Cl_{0,n})$ e $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R})$, $1 < q < \infty$. Como $\mathbf{Q}p = u$, com $u \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega, Cl_{0,n})$ e $Sc\mathbf{Q}p = 0$ temos que $ScDv = 0$. Daqui resulta que $v = 0$ e $p = 0$, isto é, $Dv + \mathbf{Q}v$ é uma soma directa que é um subconjunto de $im\mathbf{Q}$.

Queremos agora provar a existência de uma funcional $H \in (L_q(\Omega) \cap im\mathbf{Q})'$ tal que $H(Dv) = 0$ e $H(\mathbf{Q}p) = 0$, mas $H(\mathbf{Q}\widetilde{T}f) \neq 0$. Equivalentemente, provaremos a existência de $h \in W_r^{-1}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ tal que

$$(Dv, \mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega) \cap kerdiv \tag{4.9}$$

$$(\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = 0, \quad \forall p \in L_q(\Omega, \mathbb{R}) \tag{4.10}$$

mas $(\mathbf{Q}\widetilde{T}f, \mathbf{Q}\widetilde{T}h) \neq 0$, onde

$$(w, u)_{Sc} = Sc \int_\Omega \overline{w} \ u \ d\Omega$$

com $w \in L_q(\Omega)$, $u \in L_r(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Para tal, note-se que $(L_q(\Omega) \cap im\mathbf{Q})' = L_r \cap im\mathbf{Q}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

Seja $h \in W_r^{-1}(\Omega)$. Então

$$(Dv, \mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = (v, D\mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = (v, h)_{Sc} = 0,$$

donde resulta, pelo lema B.0.9, $h = \nabla g = Dg$ com $g \in L_r(\Omega, \mathbb{R})$.

Assim, temos para qualquer $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R})$,

$$(\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}\widetilde{T}Dg)_{Sc} = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}(g - \widetilde{F}_\Gamma g))_{Sc} = (\mathbf{Q}p, \mathbf{Q}g)_{Sc} = 0.$$

Portanto, $\mathbf{Q}g = 0$ e $h = D\mathbf{Q}g = 0$, donde obtemos que

$$(\mathbf{Q}\widetilde{T}f, \mathbf{Q}\widetilde{T}h)_{Sc} = 0, \ \forall f \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega).$$

Concluímos assim que se pode decompor cada função $\mathbf{Q}\widetilde{T}f$, $f \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega, Cl_{0,n})$, $1 < q < \infty$, da forma seguinte

$$Dv + \frac{1}{\mu}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\mu}\mathbf{Q}\widetilde{T}f,$$

para $v \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega, Cl_{0,n}) \cap ker\ div$ e $p \in L_q(\Omega, \mathbb{R})$.

Aplicando o operador $\widetilde{T}$ resulta

$$v + \frac{1}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}p = \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}\mathbf{Q}\widetilde{T}f.$$

Assuma-se agora $f \in L_q(\Omega, Cl_{0,n})$. Então

$$v = \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}Vec\widetilde{T}f - \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}Vec\widetilde{F}_\Gamma(tr\ \widetilde{T}Vec\widetilde{F}_\Gamma)^{-1}tr\widetilde{T}Vec\widetilde{T}f \tag{4.11}$$

$$p = \rho Sc\widetilde{T}f - \rho Sc\widetilde{F}_\Gamma(tr\ \widetilde{T}Vec\widetilde{F}_\Gamma)^{-1}tr\widetilde{T}Vec\widetilde{T}f \tag{4.12}$$

é solução do problema de Stokes.

Para esta solução tem-se a estimativa seguinte

$$\| Dv \|_{L_q(\Omega)} + \frac{1}{\mu}c \| \mathbf{Q}p \|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{\rho}{\mu} \| \widetilde{T}f \|_{L_q(\Omega)}$$

com $c \geq 1$ uma constante.

Esta estimativa é válida também no caso de $f \in W_q^{-1}(\Omega, Cl_{0,n})$, devido à densidade deste espaço em $L_q(\Omega, Cl_{0,n})$.

De acordo com o que foi dito podemos escrever o seguinte teorema sobre a unicidade de soluções para o problema de Stokes

Teorema 4.2.2 *Seja $f \in W_q^{-1}(\Omega, Cl_{0,n})$. Então o problema de Stokes (4.5) tem solução única $(v, p) \in \overset{\circ}{W}{}_q^1 (\Omega, Cl_{0,n}) \cap kerdiv \times L_q(\Omega, \mathbb{R})$ da forma*

$$v + \frac{1}{\mu}\widetilde{T}\boldsymbol{Q}p = \frac{\rho}{\mu}\widetilde{T}\boldsymbol{Q}\widetilde{T}f$$

e em relação à estimativa

$$\| Dv \|_{L_q(\Omega)} + \frac{1}{\mu}c \| \boldsymbol{Q}p \|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{\rho}{\mu} \| \widetilde{T}f \|_{L_q(\Omega)} .$$

Das representações (4.11) e (4.12) resulta que, se $f \in W_q^k(\Omega, Cl_{0,n})$, então $v \in W_q^{k+2}(\Omega, Cl_{0,n})$ e $p \in W_q^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, para $1 < q < \infty,\ k \geq 0$.

Apêndice A

Funcionais lineares

Consideremos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, o espaço linear das funções de classe C^∞ com suporte compacto em Ω e topologia induzida pela *convergência no sentido de* $\mathcal{D}$, definida a seguir:

Dizemos que a sequência de funções $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ_0, *no sentido de* $\mathcal{D}$ se:

1. existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que *supp* $\phi_0 \subset K$ e *supp* $\phi_n \subset K$, $n \in \mathbb{N}$

2. a sequência das derivadas $(D^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi_0$

Designamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da topologia induzida pela *convergência no sentido de* $\mathcal{D}$.

Para funções ϕ deste espaço, designadas *funções teste*, definimos a *função generalizada* ou *distribuição* como sendo

$$< f,\ . > \mapsto < f,\ \phi > = \int_\Omega f(x)\ \phi(x)\ dx$$

designada por funcional linear contínua. Temos assim que a distribuição $< f,\ . >$ pertence ao espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, que denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, a distribuição $< f,\ \cdot >$ diz-se uma *distribuição regular*, nos restantes casos, a distribuição diz-se *singular*.

Exemplos: Como exemplos de distribuições, podem indicar-se a distribuição de Heaviside e a delta de Dirac. A primeira,

$$H(x) = \begin{cases} 1,\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

permite definir a função generalizada, de $D(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$ por

$$< H,\ \phi > = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\ \phi(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} \phi(x)\ dx$$

Esta distribuição é uma distribuição regular.

Como exemplo de uma distribuição singular, temos a funcional delta de Dirac: $< \delta,\ .\ >$, é definida por

$$< \delta,\ \phi > = \phi(0),\ \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)\ .$$

Apêndice B

Teoremas importantes

Para demonstrar a existência e a unicidade das soluções fracas para o problema de Stokes, são necessários os teoremas que a seguir apresentamos, e cujas demonstrações se podem encontrar em [10].

Teorema B.0.3 *Seja $L_d = x \in \mathbb{R}^n : -\frac{d}{2} < x_n < \frac{d}{2}$ uma camada de tamanho inferior a $d > 0$. Se $\Omega \subset L_d$, então qualquer que seja $u \in W^1_{0,q}(\Omega),\ 1 \leq q \leq \infty$,*

$$\| u \|_q \leq \frac{d}{2} \| \nabla u \|_q \tag{B.1}$$

Teorema B.0.4 *Seja Ω um domínio arbitrário de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$. Suponha-se que $\mathcal{F}$ é uma funcional linear limitada de $D^1_{0,q}(\Omega')$, onde Ω' é um domínio limitado de Ω, com $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Então existe $p \in L^{q'}_{loc}(\Omega)$, tal que $\mathcal{F}$ admite a seguinte representação*

$$\mathcal{F}(\psi) = \int_\Omega p \nabla \cdot \psi,\ \textit{para}\ \psi \in \mathrm{C}_0^\infty$$

Teorema B.0.5 *Seja Ω um domínio limitado ou um domínio exterior de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, que satisfaz a condição do cone, ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Então qualquer funcional $\mathcal{F}$ em $D^1_{0,q}(\Omega),\ 1 < q < \infty$, identicamente nula em $\overset{\wedge}{D^1_{0,q}}(\Omega)$ é da forma*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{v}) = \int_{(\Omega)} p \nabla \cdot \boldsymbol{v},\ \textit{para todo}\ \boldsymbol{v} \in \mathrm{D}^1_{0,\mathrm{q}}(\Omega)$$

para algum $p \in L_{q'}(\Omega)$, ou, se Ω é limitado, $p \in \overset{\wedge}{L_{q'}}(\Omega) \equiv L_{q'}(\Omega) \setminus \mathbb{R}$.

Teorema B.0.6 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, tal que*

$$\Omega = \cup_{k=1}^N \Omega_k,\ N \geq 1,$$

sendo cada um dos domínios Ω_k domínio estrelado, em relação a uma bola aberta B_k com $\overline{B_k} \subset \Omega_k$. (Por exemplo, Ω satisfaz a condição do cone.) Então, dada uma função $f \in L_q(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega f = 0,$$

existe pelo menos uma solução $\boldsymbol{v}$ para o problema

$$\nabla \cdot = f$$

$$\boldsymbol{v} \in W^1_{0,q}(\Omega)$$

$$\boldsymbol{v}_{1,q} \leq c \parallel f \parallel_q .$$

Além disso, a constante c admite a seguinte estimativa:

$$c \leq c_0 C \left(\frac{\delta(\Omega)}{R_0}\right)^n \left(1 + \frac{\delta(\Omega)}{R_0}\right)$$

onde R_0 é o menor raio das bolas B_k, $c_0 = c_0(n, q)$ e C é dada por

$$C = \left(1 + \frac{|\Omega_k}{|\Omega_k \cap D_k|}\right) \Pi_{i=1}^{k-1} \left(1 + |F_i|^{\frac{1}{q}} - 1|D_i - \Omega_i|^{1-\frac{1}{q}}\right)$$

onde $D_i = \cup_{s=i+1}^N \Omega_s$ e $F_i = \Omega_i \cap D_i,\ i = 1, \ldots, N-1$.

Finalmente, se f tem suporte compacto em Ω, então $\boldsymbol{v}$ também tem suporte compacto.

Teorema B.0.7 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, um domínio localmente lipschitziano, exterior. Então, para $f \in L_q(\Omega)$ e $\boldsymbol{a} \in W_q^{1-\frac{1}{q}}(\partial\Omega)$, existe pelo menos uma solução para o problema*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = f$$

$$\boldsymbol{v} \in D^{1,q}(\Omega)$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \text{ em } \partial\Omega$$

$$|\boldsymbol{v}|_{1,q} \leq \left(\parallel f \parallel_q + \parallel \boldsymbol{a} \parallel_{1-\frac{1}{q},\ q}\right)$$

Teorema B.0.8 *Seja Ω um domínio localmente lipschitziano, para $m = 1, 2$ e de classe $C^{m,1}$, se $m > 3$. Assuma-se que $u \in W_q^m(\Omega),\ 1 \leq q < \infty,\ m \geq 1$ com $tr_m(u) \equiv 0$ a.e. em $\partial\Omega$. Então $u \in W^m_{0,q}(\Omega)$.*

Lema B.0.9 *Seja Ω um domínio arbitrário em $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{u} \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ para qualquer $\boldsymbol{w} \in D(\Omega)$. Então existe uma função escalar $p \in W^1_{1,loc}(\Omega)$ tal que $\boldsymbol{u} = \nabla p$.*

Teorema B.0.10 ***Teorema da representação de Riesz***

Sejam X um espaço de Hilbert e f uma funcional linear limitada em X. Então existe um único elemento $x_f \in X$ tal que

i. $f(x) = (x, x_f), \ \forall x \in X$

ii. $\| f \| = \| x_f \|_X$.

Inversamente, qualquer $y \in X$ define uma funcional linear limitada de X em $\mathbb{R}$, com

$$< f_y, x >:= (x, y) \text{ e } \| f_y \| = \| y \|_X$$

B.1 Teorema de Stokes

Em $\mathbb{R}$, se temos f uma função de classe C^1, definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$, então a função contínua g é a derivada de f se satisfaz

$$\int_a^b g(x)dx = f(a) - f(b) \tag{B.2}$$

para a e b apropriados.

Para generalizar (B.2) a $\mathbb{R}^n$, o lado direito da equação tem de ser substituído por um integral sobre a fronteira, dado que, em $\mathbb{R}^n$ os domínios têm (em geral) fronteiras que não consistem em pontos isolados.

Teorema B.1.1 Teorema de Stokes

Seja $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função com valores na álgebra de Clifford $Cl_{0,n}$ e Ω uma domínio de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. Então:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} d\Omega = \int_\Gamma \alpha_i(x) f(x) d\Gamma \tag{B.3}$$

onde $\alpha_i(x)$ é a componente i do vector normal unitário e exterior da fronteira Γ no ponto x.

B.2 Teoremas de embebimento

Teoremas de embebimentos contínuos

Os espaços de Sobolev formam uma escala, ou seja

$$W_2^{k_1} \subset W_2^{k_2}, \ k_1 \geq k_2, \ k_i \geq 0$$

é um embebimento contínuo.

No caso de k suficientemente grande, então W_2^k apenas consiste em funções contínuas.

No teorema seguinte estabelece-se a ligação entre os espaços de Sobolev e o espaço das funções contínuas.

Teorema B.2.1 *Sejam $l > k$ e Ω limitado, com forma de estrela. Então, para $l + k > \frac{n}{2}$, com n a dimensão do espaço, o embebimento*

$$W_2^l \subset C^k(\overline{\Omega})$$

é compacto, linear e contínuo.

Teorema B.2.2 Teorema de embebimento de Sobolev

Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$ e para $1 \leq k \leq n$, seja Ω_k a intersecção de Ω com um plano de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. Observemos que no caso de $k = n$ então $\Omega_k = \Omega$.

Sejam ainda $j \geq 0$ e $m \geq 1$ inteiros e $1 \leq p \leq \infty$. Em primeiro lugar suponhamos que Ω satisfaz a condição do cone.

- *CASO A - Se $mp > n$ ou $m = n$ e $p = 1$:*

  Então

  $$W_p^{j+m}(\Omega) \to C_B^j(\Omega)$$

  e além disso, se $1 \leq k \leq n$, então

  $$W_p^{j+m}(\Omega) \to W_p^j(\Omega_k),\ p \leq q \leq \infty$$

  e em particular,

  $$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega),\ p \leq q \leq \infty$$

- *CASO B - Se $1 \leq k \leq n$ e $mp = n$:*

  $$W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega_k),\ p \leq q < \infty$$

  e em particular

  $$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega),\ p \leq q < \infty$$

- *CASO C - Se $mp < n$ e ou $n - mp < k \leq n$ ou $p = 1$ e $m - n \leq k \leq n$:*

  $$W_p^{j+m}(\Omega) \to W_p^j(\Omega_k),\ p \leq q \leq p^* = \frac{kp}{n - mp}$$

Em particular,

$$W_p^m(\Omega) \to L_q(\Omega), \ p \le q \le p^* = \frac{np}{n-mp}$$

As constantes de embebimento para os embebimentos acima referidos dependem apenas de $n,\ m,\ p,\ q,\ j,\ k$ e das dimensões do cone C da condição do cone.

Consideremos agora o caso em que Ω satisfaz a condição forte de Lipschitz local.

Neste caso o espaço $C_B^j(\Omega)$ do primeiro embebimento em cima, pode ser substituído pelo espaço mais pequeno $\overline{C}^j(\overline{\Omega})$, e temos os embebimentos seguintes:

- Se $mp > (m-1)p$:

$$W_p^{j+m}(\Omega) \to C_{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \ 0 < \lambda \le m - \frac{n}{p}$$

- Se $n = (m-1)p$:

$$W_p^{j+m}(\Omega) \to C_{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \ 0 < \lambda < 1$$

- Se $n = m-1$ e $p = 1$: então o embebimento anterior é válido também para $\lambda = 1$

Os embebimentos anteriores são também válidos para um domínio Ω arbitrário, se substituirmos o espaço W pelo espaço W_0 correspondente.

Bibliografia

[1] Adams, R.A., Fournier, J.J.F.; *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2^a edição, 2003.

[2] Batchelor, G. K.; *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

[3] Brackx, F., Delanghe, R. and Sommen, F.; *Clifford Analysis*, Research Notes in Mathematics no. 76, Pitman, London, 1982.

[4] Cerejeiras, P.; Reproduting Kernels for Hyperbolic Spaces, *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, **2**, (2000), 303-314.

[5] Cerejeiras, P. and U. Kähler; Elliptic boundary value problems of fluid dynamics over unbounded domains, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **23**, (2000), 81-101.

[6] Cerejeiras, Kähler, Sommen, F.; Parabolic Dirac Operators and the Navier-Stokes Equations over Time-varying Domains, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **28**, (2005), 1715-1724.

[7] Delanghe, R., Sommen, F., and Souček, V.; *Clifford Algebras and Spinnor-Valued Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[8] Ferreira, Milton; Generalização espacial do operador $\prod$ complexo (Monografia, Seminário 5.^{o} ano da Licenciatura em Ensino de Matemática da Universidade de Aveiro, 2003)

[9] Fletcher, C. J.; *Computacional Techniques for Fluid Dynamics*,vol II, Springer, New York, 1988.

[10] Galdi, G. P.; *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer, New York, 1994.

[11] Gilbert, J. and M. Murray; *Clifford Algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[12] Gürlebeck, K. and W. Sprößig; An application of quaternionic analysis to the solution of time-independent Maxwell equations and of Stokes equations, *Suppl. Rend. Circolo Mat. Palermo, Serie 2* (1987), 61-76.

[13] Gürlebeck, K. and W. Sprößig; *Quaternionic Analysis ans Elliptic Boundary Value Problems*, Birkhäuser, Basel, 1990

[14] Gürlebeck, K. and W. Sprößig; *Quaternionic and Clifford Calculus for Engineers and Physicists*, John Wiley & Sons, Cinchester, 1997.

[15] Gürlebeck, K.; On some Applications of the Biharmonic Equation *Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics*, (1998), 109-128.

[16] Heywood, J.G., Masuda, K., Rautmann, R., Solonnikov, S.A.; *Theory of the Navier-Stokes Equations*, World Scientific, cop., Singapura, 1998.

[17] Heywood, J.G., Masuda, K., Rautmann, R., Solonnikov, S.A.; *Navier-Stokes Equations II - Theory and numerical methods*,Springer, Berlim, 1992.

[18] Kähler, U.; The Navier-Stokes Equations over Unbounded Domains, *Proceedings of the Second ISAAC Congress*, **2**, (2000), 1431-1446.

[19] Kay, J. M. and R. M. Nedderman; *An Introduction to Fluid Mechanics and Heat Tranfer*, Cambridge University Press, 6^a edição, 1974.

[20] Ladyzenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N.; Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, *Translations of mathematics monografs*, **23**, AMS, 1968

[21] Michlin, S.G. and S. Prössdorf; *Singular integral operators*, Akademic-Verlag, Berlim, 1986.

[22] Obolashvili, E.; Some Partial Differential Equations in Clifford Analysis, *Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics*, (1998), 275-289.

[23] Peyret, R.; *Handbook of Computacional Fluid Mechanics*, Academic Press, 2004.

[24] Sprößig, W.; On a Class of Non-linear Boundary Value Problems, *Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics*, (1998), 383-389.

[25] Temam, R.; *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, 2001

[26] Wendt, J. F.; *Computacional Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.

[27] Yosida, Kôsaku; *Funtional Analysis*, Springer-Verlag, 6^a edição, 1980.